第一章 算法初步

I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

算法思想是现代人应具备的一种数学素养．本章的课程目标是，让学生了解算法的初步知识和几个典型的算法案例；使学生体会算法的基本思想、基本特征；发展学生有条理的思考与表达的能力，提高他们的逻辑思维能力．同时让学生体会算法在科学技术和社会发展中的重要作用，了解以“算法”为基础的中国古代数学的辉煌成就．

2. 学习目标

（1）通过分析具体问题过程与步骤，体会算法的思想，了解算法的含义，能用自然语言描述解决具体问题的算法；

（2）在具体问题的解决过程中，掌握基本的程序框的画法，理解程序框图的三种基本逻辑结构——顺序结构、条件结构、循环结构；

（3）通过模仿、操作、探索，经历通过设计程序框图表达解决问题的算法的过程；

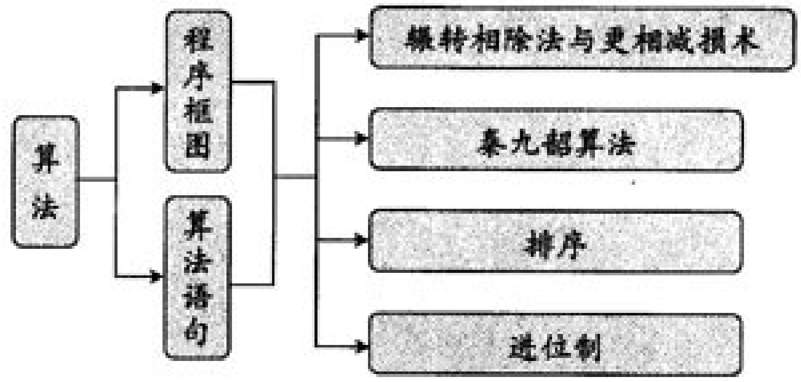
（4）结合具体问题，理解几种基本算法语句——输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句，理解它们与三种基本逻辑结构之间的关系；

（5）经历将具体问题的程序框图转化为程序语句的过程；

（6）了解中国古代及西方数学中几个典型的算法案例，理解其中所包含的算法思想，体会中国古代数学对世界数学发展的贡献．

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章共分 3 节：1.1 算法与程序框图，1.2 基本算法语句，1.3 算法案例.

（1）算法是学生既陌生又熟悉的内容，教科书从研究学生熟悉的二元一次方程组的求解过程出发，引出算法的描述性的定义及算法的主要特征，然后借助例题进一步展现这些特征.

（2）程序框图能够更加直观、清楚地描述算法步骤．教科书首先展示了一个较为复杂的、完整的程序框图，然后分解出这个程序框图中的三种基本的逻辑结构，接着分别用简单的例子对这三种结构作详细地阐述.

（3）用算法语句描述算法是用计算机解决问题的前提条件，而一般的操作顺序是先设计算法，接着用程序框图表示算法，然后将程序框图转化为算法语句．教科书按照介绍三种基本的逻辑结构的顺序，结合具体例题，分别介绍了相关的基本的算法语句，其中包含了与相应程序框图比较、把程序框图转化为算法语句的过程.

（4）了解经典的算法案例有助于学生深入理解算法的特征和进一步体会算法的思想．教科书列举了 4 个中国古代及西方数学中的算法案例，并通过栏目设置给学生在模仿、操作、探索的机会，帮助他们体会其中所蕴涵的算法思想.

（5）"割圆术"是中国古代一个典型的算法，阅读与思考栏目对这个算法进行了详细的阐述：从刘徽对"割圆术"的描述出发，用递推公式表示算法的关键步骤，然后将算法写成计算机程序，其中体现了从古到今、从笔算到机算的过程，既展现了算法中所包含的以直代曲、无限趋近、"内外夹逼"的思想，又说明了借助算法，利用计算机解决问题的优势.

三、课时分配

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）：

1.1　算法与程序框图	约 2 课时
1.2　基本算法语句	约 3 课时
1.3　算法案例	约 6 课时
小结	约 1 课时

III 教科书分析

教科书分析

本章章头图意在体现中国古代数学与现代计算机科学的联系，它们的基础都是“算法”.

中国古代数学在世界数学史上一度占居领先地位. 她注重实际问题的解决，以算法为中心，寓理于算，其中蕴涵了丰富的算法思想. 算筹是中国古代的计算工具，在春秋时期已经很普遍；算盘在明代开始盛行，即使在计算机普及的今天，许多人仍然在使用算盘. 中国古代涌现了许多著名的数学家，如三国及两晋时期的赵爽、刘徽，南北朝时期的祖冲之、祖暅父子，宋、元时期的秦九韶、杨辉、朱世杰，等等. 古时著名的数学专著如《九章算术》《周髀算经》《数书九章》《四元玉鉴》等. 所有这些成就，都使中国数学曾经处于世界巅峰.

章头图的后景是元代朱世杰所著的《四元玉鉴》，前景的后部是盛行一时的计算工具——算筹和算盘. 教师可以结合章头图的这些内容，向学生介绍中国古代数学的特征和辉煌成就，让学生体会中国古代数学对世界数学发展的贡献.

计算机的问世可谓 20 世纪最伟大的发明，它把人类社会带进了信息技术时代，而算法是计算机科学的重要基础. 就像使用算盘一样，人们需要给计算机编制“口诀”——算法，才能让它工作. 要想了解计算机的工作原理，算法的学习是一个开始.

章头图前景的前部是一台计算机，教师可以向学生介绍 20 世纪以来，随着计算机的广泛应用，算法在科学技术、社会发展中发挥的越来越大的作用.

因此，正如章引言中所述：“算法并不是一个全新的概念.” 章头图正是想说明，从古到今，“算法”都在扮演着重要的时代角色.

本章的章引言除了指出算法与计算机的密切联系、列举中西方数学中有趣的算法，还提示了本章的主要内容.

1.1 算法与程序框图

本节主要回答两个问题：算法是怎样的？怎样描述算法？对于前一个问题，教科书在 1.1.1 中用例子说明了算法的概念和特征；对于后一个问题，教科书在 1.1.1 和 1.1.2 中，分别讲述了用自然语言和程序框图描述算法的方法.

1.1.1 算法的概念

一、本节知识结构

二元一次方程组的求解步骤

↓

算法的概念和特征

↓

两个算法实例

二、教学重点与难点

本节的教学重点是通过实例体会算法思想，初步理解算法的含义．这也是本节的难点．

三、编写意图与教学建议

本节的目标是初步建立算法的概念，让学生通过丰富的实例初步感受算法的思想，了解算法的含义．因此，教科书先从学生熟知的实例出发，引出算法的概念；随后，又通过两个简单的算法实例，以加深学生对算法的认识．内容安排遵循人们认识事物的一般规律：由具体到抽象，再由抽象到具体．

1．教科书先从分析一个具体的二元一次方程组的求解过程出发，归纳出了二元一次方程组的求解步骤；并且指出，这样的求解步骤也适用于有限制条件的一般的二元一次方程组，这些步骤就构成了解二元一次方程组的算法．这样处理，可使学生在原有的知识基础上，在具体情境中初步感受什么是算法，为认识算法概念奠定基础．

需要特别指出的是，教科书从具体的二元一次方程组求解步骤，推广到有限制条件的二元一次方程组，再到"思考"栏目中的一般的二元一次方程组，旨在传达这样一个思想：算法是用来解决某一类问题的．这在后面算法的概念中也有体现．因此，教学中应当使学生认识到，力求使算法具有普适性是设计算法的一条基本原则，这样才能使算法更有价值．

教学中，应充分重视教科书安排的上述过程，引导学生在回顾二元一次方程组求解过程的基础上，让他们自己归纳出求解二元一次方程组的 3 个步骤，从而让学生经历算法分析的基本过程，培养他们思维的条理性；然后，再引导学生讨论一般的二元一次方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$ $(a_1b_2-a_2b_1\neq 0)$的求解步骤．这样，在引导学生逐步完善二元一次方程组求解步骤的过程中，使他们体会算法分析的基本思想方法．

用语言描述一个算法，最便捷的方式就是按解决问题的步骤进行描述，每一步做一件事情．本节的例题都是按照这样的方式进行描述的，这样的描述方法也体现了算法的按部就班的程序性特点．算法实际上是一种独特的解题过程，与一般的解题过程比较，算法是构造性的，而且必须在有限步之内完成．在这个过程中，递归性往往又是某些较为复杂的算法的特点．所以算法就是一种利用有限构造或有限递归构造的方法解决问题的过程．

2．在学生从具体实例中获得对算法的初步体会的基础上，教科书给出了算法的概念．教学中，可以先让学生归纳一下算法的特征，然后再适时加以引导和完善．对于算法的概念，需要明确的是：

（1）算法在中学数学课程中是一个新的概念，理解算法概念一定要从具体实例出发．算法并没有一个精确化的定义，教科书只对它作了如下描述："现代意义上的'算法'通常是指可以用计算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成"．所以，教学中，只要使学生明确算法实际上就是解决问题的一种程序性方法，它通常指向某一个或一类问题，而解决的过程是程序性和构造性的．算法又可以看成是一种解决问题的特殊的有效的方法，中学课程中的算法更强调具体算法所蕴涵的算法思想，重点在于培养学生的算法意识，这是在算法教学中始终应该注意的．

（2）算法虽然没有一个明确的概念，但其特点还是很鲜明的，不仅要注意理解算法的程序性、有限性、构造性、精确性的特点，还应该充分理解算法的问题指向性，即算法往往指向解决某一个或某一类问题，泛泛地谈算法是没有意义的，算法一定以问题为载体，例如，按照某一精确度要求计算圆

周率 π 的近似值（实际上，人们对寻求快速、有效的计算圆周率 π 的近似值的算法一直兴趣不减）. 算法概念的教学应主要通过算法案例让学生体会算法的特点，逐步建立算法的概念，并通过对具体问题的探究体会算法思想.

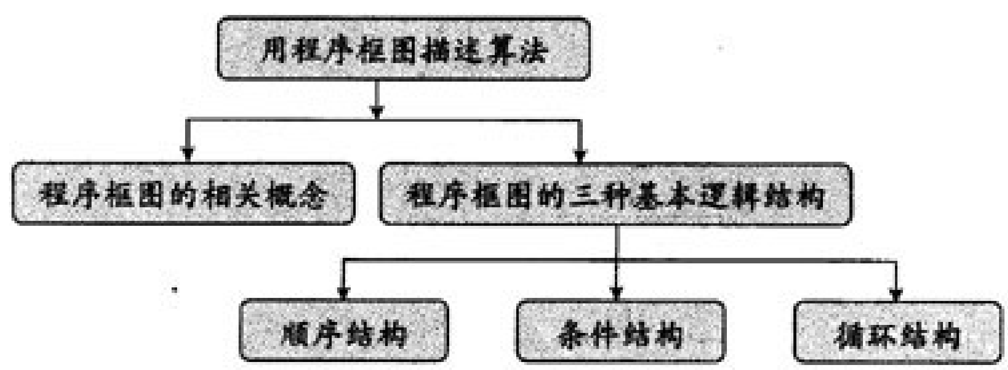
3. 在算法概念之后，教科书紧接着安排了两个例题：素数的判断和用二分法求方程近似解. 素数的判断是小学时就接触过的，用二分法求方程近似解在《数学 1》中出现过，因此这两个问题是学生熟悉的. 选择这样的问题，一方面是期望打破学生对算法的陌生感，另一方面也是希望将重点放在算法概念的理解上，而不是算法所涉及的问题本身. 教学时可以先让学生回顾这两个问题的解题过程，再让他们自己整理出步骤，并有条理地用自然语言表达出来. 通过这样的教学，使学生体会设计算法的基本思路.

通过这两个例题应当使学生体会到，设计一个具体问题的算法时，与过去熟悉的解数学题的过程有直接联系，但这个过程必须被分解成若干个明确的步骤，而且这些步骤必须是有效的，根据这些步骤就能在有限步之内完成解题过程.

4. 在给出两个实例后，接下来教科书又设置了一个“思考”，目的是通过学生自己举例、总结和思考，加深对算法概念的理解. 实际上，算法与一般的解决问题的过程有联系，但算法是“傻瓜化”的，即算法要“面面俱到”，不能省略任何一个细小的步骤（只有这样，才能在人设计出算法后，把具体的执行过程交给计算机完成）. 例如，对于例 1，如果由人来完成判断，那么第一步能够“一眼看出”，而第二步则只要从 2 检验到$[\sqrt{n}]$（不超过$\sqrt{n}$的最大整数）即可. 这里之所以设计成从 2 到$(n-1)$逐个检验，主要是为了降低算法本身的难度，使学生的注意力放在算法设计上.

1.1.2 程序框图

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：经过模仿、操作、探索，经历通过设计程序框图表达求解问题的过程，在具体问题解决过程中，理解程序框图的三种基本逻辑结构.

学生可能在以下方面遇到困难：用程序框图清晰表达含有循环结构的算法.

三、编写意图与教学建议

1. 程序框图是表达算法的更为直观和明确的方式.

将自然语言描述的方式转换为程序框图，往往需要考虑很多细节，是一个将算法“细化”的过程.

教师可以在教完本小节后，以教科书 1.1.1 中例 1 的算法为例，比较两种描述方法.

用程序框图表达算法，可以很清楚地看出三种基本的逻辑结构，即顺序结构、条件结构和循环结构. 顺序结构可以单独出现，也可以出现在条件结构或循环结构的局部，而循环结构则一定包含着条件结构. 三种结构是一个算法程序框图的基本构成要素，在明确算法概念的基础上，要通过实例使学生基本掌握这三种结构.

2. 对第 6 页的思考栏目的说明.

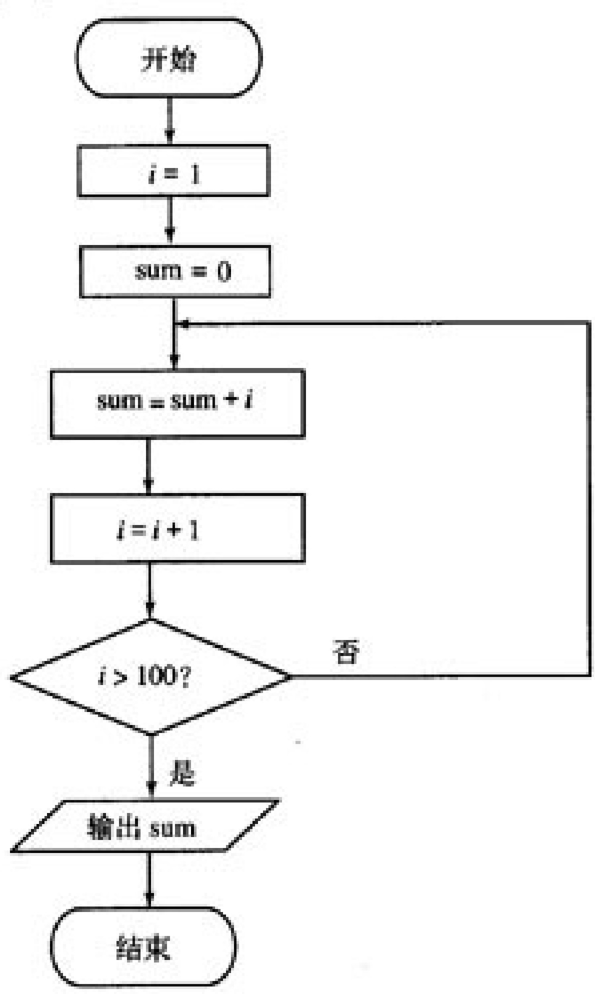
d 表示从 2 到$(n-1)$的所有正整数，用以判断“步骤二”是否终止. $d=d+1$ 是一个计数变量，有了这个变量，算法才能依次执行，逐个考查从 2 开始到$(n-1)$的所有正整数中是否有 n 的因数存在. 这是一个很基本的表示执行次数的形式，尤其在接下来的循环结构中更为常见，同时也用来判断操作是否终止.

3. 关于循环结构的说明和教学建议.

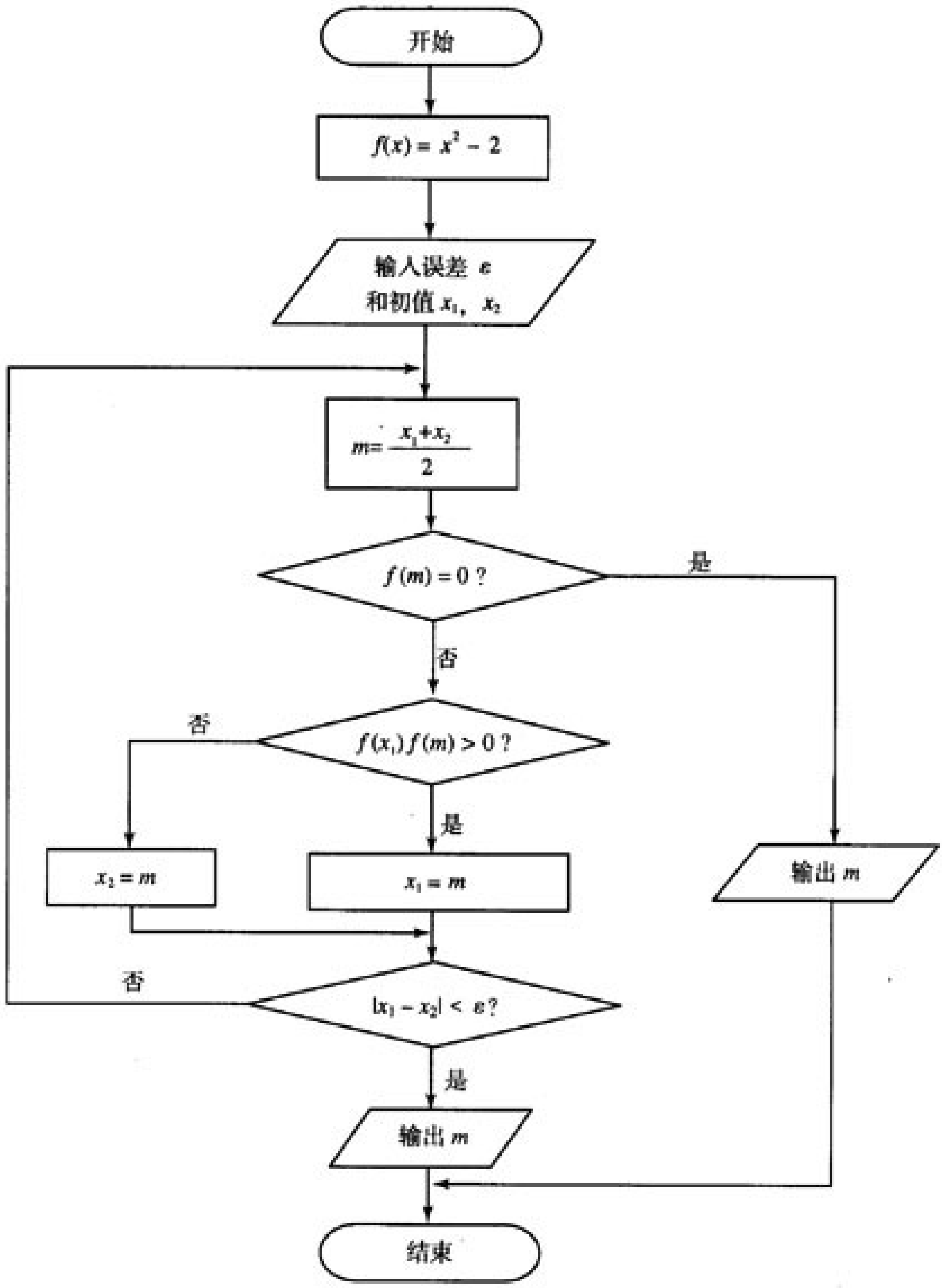
（1）循环结构不能是永无终止的“死循环”，一定要在某个条件下终止循环，这就需要条件结构来作出判断，因此，循环结构中一定包含条件结构.

（2）一般地，循环结构中都有一个计数变量和累加变量，计数变量用于记录循环次数，同时它的取值还用于判断循环是否终止. 累加变量用于输出结果. 累加变量和计数变量一般是同步执行的，累加一次，计数一次.

（3）教科书在循环结构后安排了一个“思考”栏目，第 1 个问题是为了加深学生对循环结构的理解，其中 i 是计数变量，sum 是累加变量；第 2 个问题是为了介绍另一种形式的循环结构——直到型循环，同时也为后面的两种循环语句 WHILE 语句和 UNTIL 语句做铺垫. 对于例 5 中的算法，用含有直到型循环的程序框图表示如下：



接着，教科书安排了一个“探究”栏目，作为在学习了三种基本逻辑结构之后的一个应用．目的是让学生在解决具体的问题过程中进一步体会这三种基本逻辑结构．用二分法求方程 $x^2-2=0$ 的近似根的程序框图如下：



4. 关于框图的说明．

框图不仅是表达算法的重要工具，由于其直观、形象的特点，还经常用于表达一些具有过程性特点的业务流程或者某一系统的结构关系．借助框图，人们可以清晰而有条理地表达思想．因此，在选修 1—2 中还将进一步探讨有关流程图和结构图的应用问题．

四、习题解答

练 习（第 4 页）

1. 算法步骤：

第一步：输入任意一个正实数 r；

第二步：计算以 r 为半径的圆的面积：$S=\pi r^2$；

第三步：输出圆的面积 S.

2. 算法步骤：

第一步：依次以 $2\sim(n-1)$ 为除数去除 n，检查余数是否为 0. 若是，则是 n 的因数；若不是，则不是 n 的因数.

第二步：在 n 的因数中加入 1 和 n.

第三步：输出 n 的所有因数.

说明 本题是继例 1 之后的又一个可以用"遍历"的算法解决的问题.

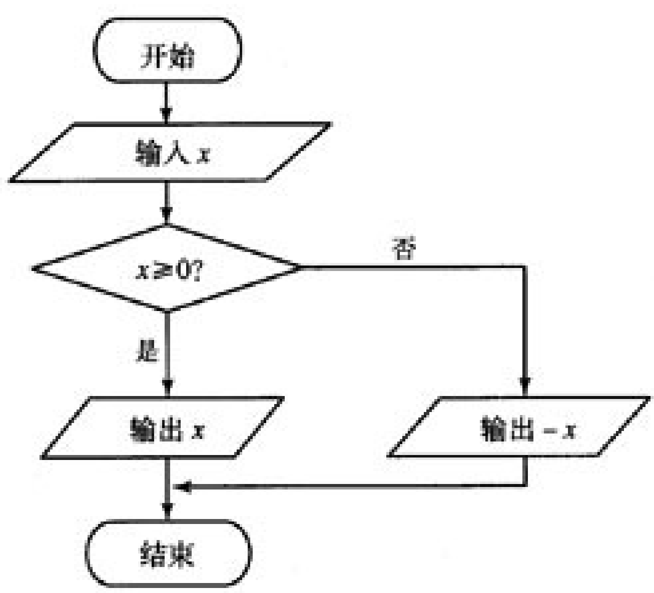
练 习（第 11 页）

1. 算法分析：设 x 是任意实数，则 x 的绝对值

$$|x|=\begin{cases}x, 当\ x\geqslant 0\ 时；\\ -x, 当\ x<0\ 时.\end{cases}$$

所以我们需要对 x 的符号进行判断，根据判断的结果决定 $|x|$ 的取值.

具体算法用程序框图表示如下：



2. 略.

习 题 1.1（第 11 页）

A 组

1. 下面是关于城市居民生活用水收费的问题.

为了加强居民的节水意识，某市制定了以下生活用水收费标准：每户每月用水未超过 7 m^3 时，每立方米收费 1.0 元，并加收 0.2 元的城市污水处理费；超过 7 m^3 的部分，每立方米收费 1.5 元，并加收 0.4 元的城市污水处理费.

设某户每月用水量为 x m^3，应交纳水费 y 元，那么 y 与 x 之间的函数关系为：

$$y=\begin{cases}1.2x，当 0\leqslant x\leqslant 7 时；\\ 1.9x-4.9，当 x>7 时.\end{cases}$$

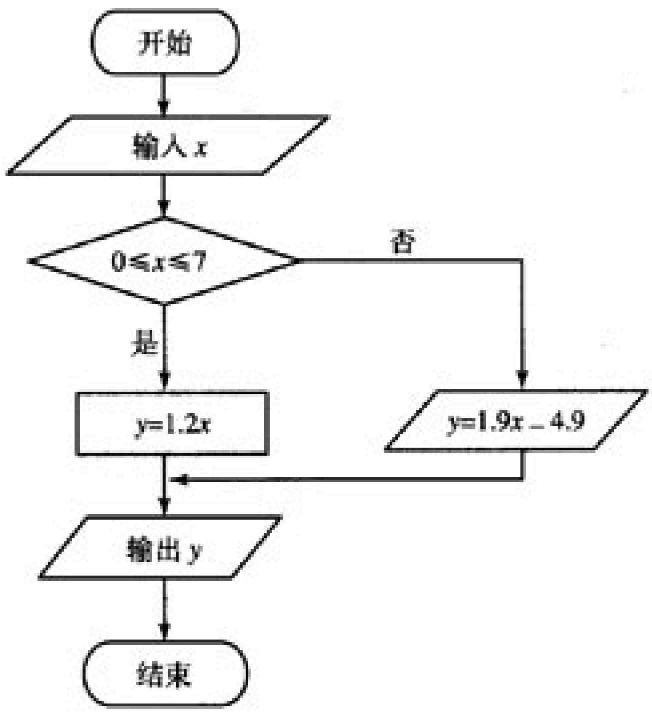
我们设计一个算法来求上述分段函数的值.

第一步：输入每月用水量 x；

第二步：判断输入的 x 是否不超过 7. 若是，则计算 $y=1.2x$；若不是，则计算 $y=1.9x-4.9$；

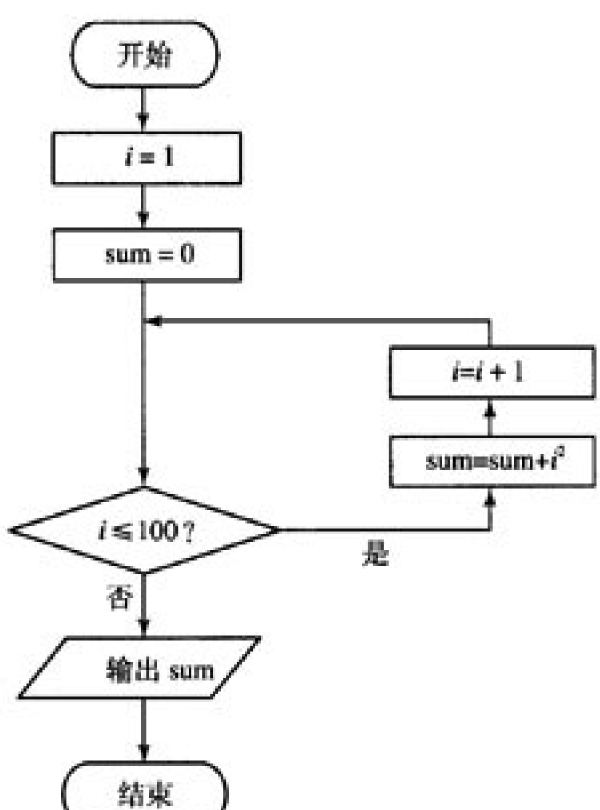
第三步：输出应交纳的水费 y.

程序框图：



2. 算法分析：用循环结构解决本题. 设累加变量为 sum，其初始值为 0；计数变量为 i，其值从 1 变到 100.

具体算法用程序框图表示如下：

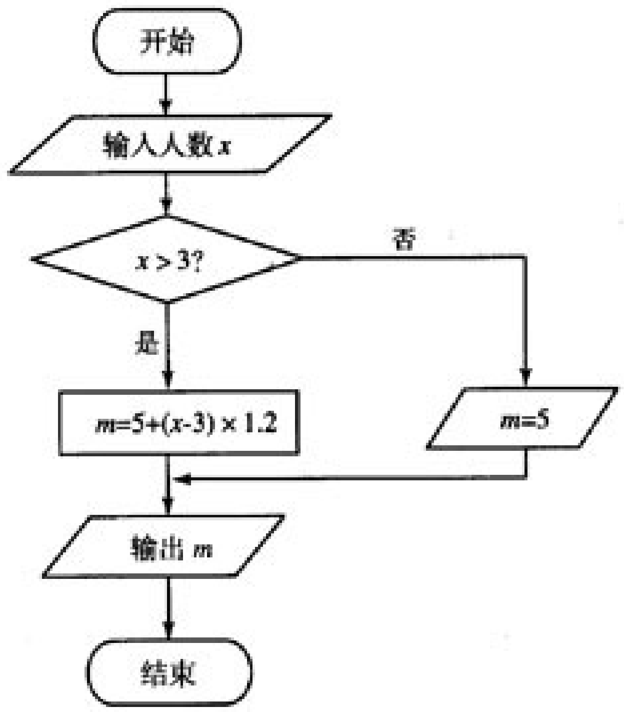


3. 算法步骤：

第一步：输入人数 x，设收取的卫生费为 m 元.

第二步：判断 x 与 3 的大小. 若 $x>3$，则费用为 $m=5+(x-3)\times1.2$；若 $x\leqslant3$，则费用为 $m=5$.

第三步：输出 m.



B组

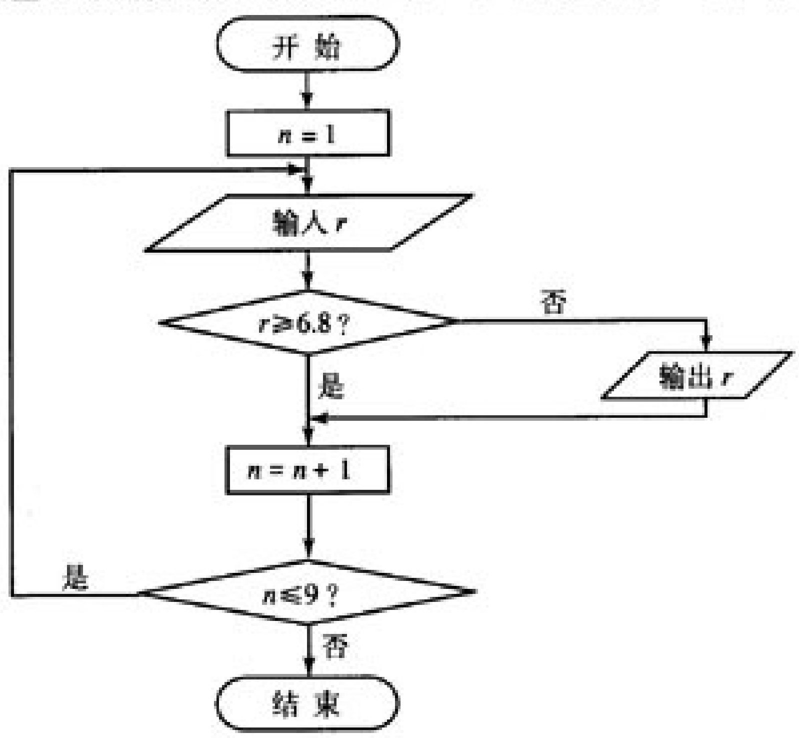
1. 算法步骤：

第一步：把计数变量 n 的初值设为 1.

第二步：输入一个成绩 r，判断 r 与 6.8 的大小. 若 $r\geqslant6.8$，则执行下一步；若 $r<6.8$，则输出 r，并执行下一步.

第三步：使计数变量 n 的值增加 1.

第四步：判断计数变量 n 与成绩个数 9 的大小. 若 $n\leqslant9$，则返回第二步；若 $n>9$，则结束.



说明 本题在由一个计数变量控制的循环结构中包含了一个条件结构.

2. 一般的二元一次方程组的形式为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, & ① \\ a_2x+b_2y=c_2, & ② \end{cases}$$

其中 $a_1b_2-a_2b_1\neq0$.

算法步骤：

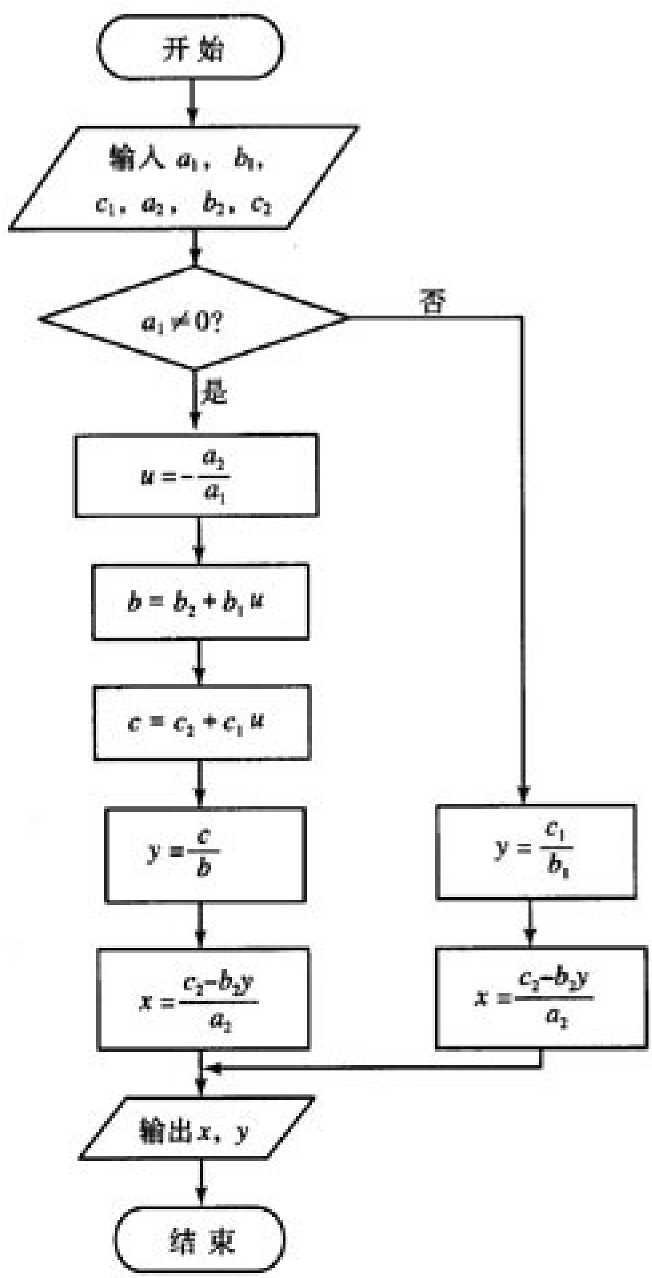
第一步：判断 a_1 是否等于 0. 如果 $a_1\neq0$，令 $u=-\frac{a_2}{a_1}$，由②+①×u，得

$$(b_2+b_1u)y=c_2+c_1u; \qquad ③$$

如果 $a_1=0$，计算 $y=\frac{c_1}{b_1}$，执行第三步.

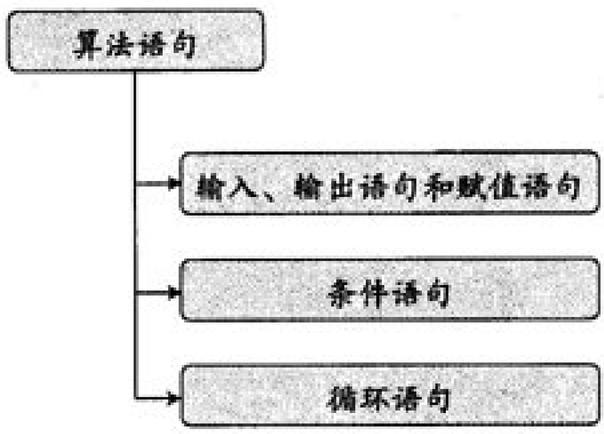
第二步：解③，得 $y=\frac{c_2+c_1u}{b_2+b_1u}$，输出 y.

第三步：将 y 值代入②，得 $x=\frac{c_2-b_2y}{a_2}$，输出 x.



1.2 基本算法语句

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：通过实例，使学生理解5种基本的算法语句的表示方法、结构和用法，进一步体会算法的基本思想.

难点：将某个具体问题的程序框图转换为程序语句.

三、编写意图与教学建议

通过前面一节的学习，学生了解了算法的含义，学习了用自然语言和程序框图表示算法的方法.本节将在此基础上，进一步学习如何用程序设计语言（PL，programming language）来表示算法.

为了向学生说明用程序设计语言表示算法的目的，可以参考下面两个方面：

1. 用程序设计语言来描述算法的必要性：一是为了解决某个具体问题，我们设计的算法包含大量烦琐的计算、复杂的作图等操作，这时计算机强大的数据处理功能可以帮助我们轻松地完成这些重复性的机械步骤；二是“计算机解决任何问题都要依赖算法”，计算机解决问题的过程就是一个对算法的执行过程，但这个算法必须是用计算机能够理解的语言描述的，而程序设计语言基本上就是计算机能够理解的语言.

2. 无论是用自然语言描述算法，还是用程序框图和程序语句表示算法，都是对算法的一种形式化的表示.但是写出算法，不等于已经实现了算法.在计算机上运行程序，就是对算法的一种实现.而我们的重点在于学习几种基本的算法语句，并用它们来表示算法，而不是学习上机运行和调试程序.

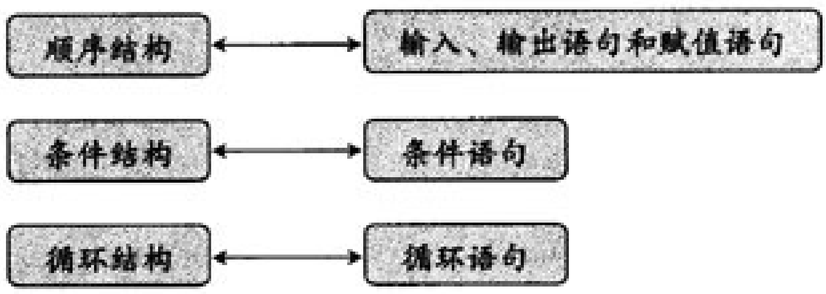
程序设计语言经历了从机器语言、汇编语言到高级语言的发展历程.三种语言都是用于描述算法的，从这个角度来讲，它们之间并没有本质的区别.高级语言比较接近人类的自然语言，它的语句多由一些简单的英文单词或缩写组成，可直接识别各种复杂的科学表达式.

高级语言的种类很多，目前较为通用的有BASIC，C，COBOL，Delphi等等.由于BASIC语言具有简单、易学等特点，我们使用了类似BASIC的语句形式和语法规则来介绍算法语句.教师可以参考

有关介绍 BASIC 或 QBASIC（BASIC 语言的一种）的书籍. 同时，教师还可以告诉学生，程序设计语言只是将算法转换为程序的工具，而算法才是解决问题的关键. 本节的教学目的之一就是通过学习算法语句，帮助学生进一步体会算法的思想.

教科书第 12 页边空中的插图，是为了帮助学生理解算法与计算机程序之间的对应关系，即：正像一个算法是求解特定问题的步骤的有限序列一样，一个计算机程序是让计算机完成某项任务而设计的一系列程序语句的有序集合. 我们可以把程序看成在某种程序设计语言中对算法的具体实现.

任何高级程序语言都包含输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句和循环语句 5 种基本语句. 这 5 种基本算法语句与算法的三种基本结构基本上是相互对应的. 为了有利于学生在学习本节的同时，进一步理解算法的基本逻辑结构，我们将本节内容分成了 3 个小节，以体现下面的对应关系：



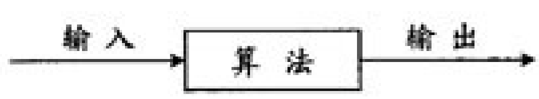
1.2.1　输入、输出语句和赋值语句

1. 算法的输入与输出.

顺序结构在计算机程序中表现为语句序列，即顺序地执行一串语句. 本节介绍的输入语句、输出语句和赋值语句都不包含“控制转移”，由它们组成的程序段必然是顺序结构的.

从数学的角度来讲，我们可以把待解决的问题看成一个函数，对应一组输入有一组相应的输出. 输入可以是一个值或一些信息，而输出就是解决问题的结果. 例如，商店的收银员要为每位顾客结账，这时输入就是每一位顾客所购商品的价格，输出是商品的价格总和，即该顾客需支付的金额.

算法是解决问题的一种方法，如果把问题看成函数，那么可以把算法看成将输入转化为输出的一个过程.



一个算法可以有 0 个或多个输入，所谓 0 个输入是指算法本身包含了初始条件；同时算法必须有 1 个或多个相应的输出. 例如，设计一个算法求 n 个变量 a_1，a_2，…，a_n 的和，这时输入就是所求 n 个变量的值，输出是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$ 的值.

算法的输入用来刻画运算对象的初始情况，输出是问题的解. 为了保证算法的正确性，输入必须是正确的. 例如，求三角形面积的算法，输入的三角形边长不能是负数或 0. 对于不同的输入，同一算法的有效性可能不同. “好”的算法，对于典型的、“苛刻”的输入也能得到满足要求的输出. 例如，对于求三角形面积的问题，可以设计一个算法，当输入的三角形边长是负数或 0 时，输出相应的提示信息.

2. 输入、输出语句和赋值语句.

相应地，一个计算机程序也要有输入和输出. 程序设计语言中的输入语句和输出语句就是用来实现这两个功能的.

另外，几乎所有的算法都需要给未知数赋值或进行运算，例如 1.1.1 中例 2 的算法中包括算法步骤“令 $m=\frac{x_1+x_2}{2}$”．程序设计语言中的赋值语句可以实现这些功能．

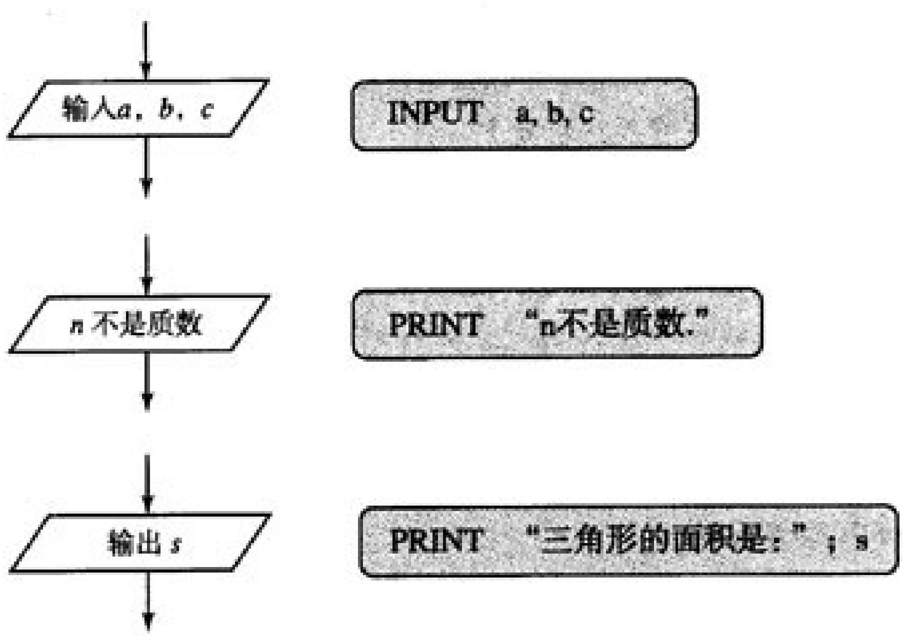
在 QBASIC 语言中，输入语句是 INPUT 语句，输出语句是 PRINT 语句，赋值语句是 LET 语句（“LET”可以省略）．下表列出了这 3 种语句的一般格式、主要功能和相关说明，供教师教学时参考，不要求学生掌握．

	INPUT 语句	PRINT 语句	赋值语句
格式	INPUT “提示内容”；变量	PRINT “提示内容”；表达式	LET 变量＝表达式
功能	可对程序中的变量赋值	可输出表达式的值，计算	可对程序中的变量赋值，计算
说明	①又称“键盘输入语句”，在程序运行过程中，停机等候用户由键盘输入数据，而不需要在写程序时指定； ②“提示内容”和它后面的“；”可以省略； ③一个语句可以给多个变量赋值，中间用“，”分隔； ④无计算功能； ⑤用户由键盘输入的数据必须是常量，输入多个数据时用“，”分隔，且个数要与变量的个数相同．	①又称“打印语句”，将表达式的值在屏幕上显示出来； ②表达式可以是变量、计算公式或系统信息； ③一个语句可以输出多个表达式，不同的表达式之间可用“，”分隔； ④有计算功能，能直接输出计算公式的值．	①在程序运行过程中给变量赋值； ②“LET”可以省略，“＝”的右侧必须是表达式，左侧必须是变量； ③一个语句只能给一个变量赋值； ④有计算功能； ⑤将一个变量的值赋给另一个变量，前一个变量的值保持不变；可先后给一个变量赋多个不同的值，但变量的取值总是最近被赋予的值．

特别应该注意的是，对于类似 $x=x+1$ 的赋值语句，学生往往很难理解，因为如果将这个式子看成代数式，显然是不成立的．所以，要让学生真正理解赋值的含义就需要理解变量的含义，这里的 x 仅仅是表示一个数值的存储位置，$x=x+1$ 使得这个存储位置上的值增加了 1．

3. 对本节“思考”栏目的解答．

用输入语句、输出语句和赋值语句表达 1.1.2 中程序框图的输入框、输出框和处理框中的内容，举例如下：



$$p=\frac{2+3+4}{2}$$

```
p=(2+3+4)/2
```

4. 例题的教学建议.

由于程序语句学习的实践性很强，所以，总的来说，例题教学应当强调学生的动手操作，给学生更多的实际编写程序语句的机会，不要只由教师讲解完成. 教学中，一方面应当使学生通过实践理解5种基本算法语句的含义及其写法，另一方面还要让学生记住这些常用的写法.

（1）例1的教学建议.

① 可以先让学生设计一个算法，写出具体的算法步骤. 再向学生展示计算机程序，然后让学生在算法步骤和程序语句之间建立起对应.

② 教科书给出了一个顺序结构的程序，包括INPUT语句、赋值语句、PRINT语句和END语句. 这样设计的目的，一是向学生展示一个完整的程序，二是为下面具体地介绍这些程序语句做准备.

③ 计算机执行INPUT语句的说明：例如，计算机在运行例1第1行的INPUT语句时，屏幕上出现一个“?”，它是执行INPUT语句时由计算机系统给出的，询问用户“变量的值是什么?”这时，只要输入变量x的一个值，如“-5”，并按Enter键，计算机就把“-5”赋给x，接着计算相应的函数值. 如果想计算当$x=-4$时的函数值，不需要修改程序，只需在计算机再次执行INPUT语句时，输入“-4”就可以了.

类似地，计算机在执行输入语句

```
INPUT "Maths, Chinese, English"; a, b, c
```

后，屏幕上出现提示信息“Maths，Chinese，English?”这时需要输入3个值，依次代表某个学生数学、语文和英文3门课的成绩，如“90，78，81”，然后按Enter键，计算机将依次把90，78，81赋给3个变量a，b，c.

（2）例2的教学建议.

① 本例表明，PRINT语句有计算的功能，可以输出计算的结果. 本例中，计算机先计算表达式$\frac{a+b+c}{3}$的值，然后再输出到屏幕上.

② 教学中，可以用比较的方法帮助学生理解INPUT语句和赋值语句的差别. 例如可采用下面的方法：已知一个学生数学、语文、英语三科的成绩分别为100，85，90，则可用赋值语句编写程序如下：

```
a=100
b=85
c=90
PRINT "The average="; (a+b+c)/3
END
```

这个程序与教科书上的程序的不同之处在于，后者可以计算任何一个学生的平均成绩；前者则只能用于计算一个学生的平均成绩，若要计算其他学生的平均成绩，则要修改程序中的前3个赋值语句.

（3）例 3 中的程序给变量 A 赋了两次值，A 的初值为 10；第二次赋值后，初值被“覆盖”，A 的值变为 25，因此输出值为 25.

（4）例 4 中程序的功能是交换两个变量的值，其中 x 是一个中间变量，暂时存放 A 的值，并把其传递给 B. 可以让学生回答能否用下列赋值语句交换 A，B 的值.

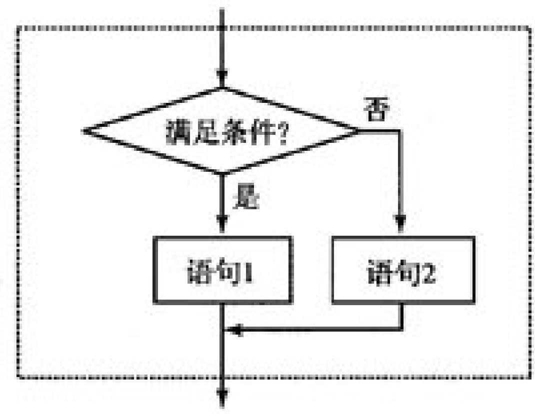
```
A=B
B=A
```

1.2.2 条件语句

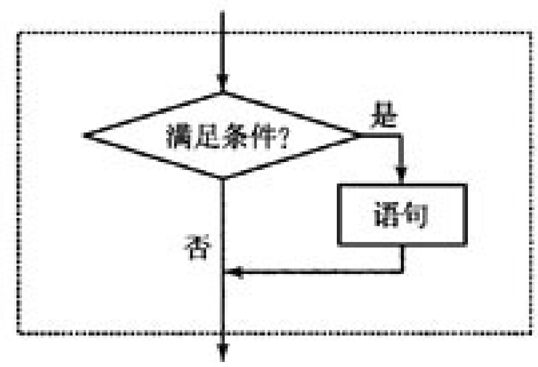
1. 条件语句与条件结构.

本节的开篇把条件语句的两种一般格式与程序框图对应起来：

```
IF 条件 THEN
    语句1
ELSE
    语句2
END IF
```




```
IF 条件 THEN
    语句
END IF
```



这样设计的意图是借助程序框图，帮助学生理解条件语句的结构，加深学生对条件逻辑结构的理解. 教师可以给出条件语句的一般格式，让学生自己画出相应的程序框图.

2. 例题的教学建议.

例 5 实际上是要求学生把一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解法程序化，在题干中还明确了“输入”和“输出”，以提示学生使用输入语句和输出语句. 由于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解按照判别式 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 可分为三种情况，因此可以设计一个包含条件结构的算法，进而用条件语句来编写程序. 本例的解答采用的是“公式法”.

另外，在算法设计中还使用了一个小技巧：先计算出 $p=-\frac{b}{2a}$，$q=\frac{\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ 的值，然后在计算 x_1 与 x_2 的值时，就可以把 p，q 的值直接代入，这样可以避免重复计算. 教师在这里可以告诉学生，一个“好”的算法往往包括此类的“小技巧”，要想熟练、有效地运用它们，则需要在大量的算法设计中积累经验. 教师也可以让学生先根据自己的思路设计算法，再提示他们改进算法，以避免重复计算等问题.

人们在用计算机解决问题时，通常先在头脑中构思一个算法，接着画出程序框图形象直观地把算法描述出来，然后再根据这个框图来编写程序. 本例的解答过程就体现了这个顺序：先画出“公式法”的程序框图，然后逐步把框图中的算法步骤用算法语句表达出来，就得到了相应的程序. 在把程序框图转化为程序语句的过程中，要着重让学生体会把框图中的条件结构转化为条件语句的过程.

例 6 也是一道典型的可用条件结构的算法解决的问题，解答的设计思路与例 1 是类似的，即先用自然语言叙述算法，接着画出程序框图表达算法，最后把程序框图转化为程序语句. 本例的程序中使用的“小技巧”是借助一个中间变量“t”来交换两个变量的值，这在 1.2.1 的例 4 中已经介绍过.

教学时，可以先让学生自己设计一个算法，然后根据算法写出程序框图. 学生可能出现的问题是引用过多的变量来存储 a，b，c 的值，这不仅会使算法变得复杂，而且不利于计算机执行. 在学生实践的基础上，教师再引导学生思考尽可能少地使用变量的必要性以及如何才能尽可能少地引用变量.

3. 对练习 2 和练习 4 的说明.

练习 2 的 IF－THEN 语句中的“AND”是一个逻辑运算符，QBASIC 中还有两个逻辑运算符“OR”和“NOT”，可以举例向学生说明它们的用法.

例如，“IF　$9<x$　AND　$x<100$　THEN”表示 AND 前后的两个条件必须同时成立才符合条件，可以执行 THEN 后的语句；“IF　$9<x$　OR　$x<100$　THEN”表示 OR 前后的两个条件只需有一个成立就符合条件，可以执行 THEN 后的语句；“IF　NOT　$x<100$　THEN”表示当 $x\geqslant 100$ 时符合条件，可以执行 THEN 后的语句.

学生在解答练习 4 时可能要用到关系运算符，可以告诉学生 QBASIC 中的关系运算符包括＜（小于），＞（大于），＝（等于），＞＝（大于或等于），＜＝（小于或等于），＜＞（不等于）.

1.2.3　循环语句

教科书介绍了两种结构的循环语句——当型和直到型，它们的区别在于：当型循环语句先对一些条件进行判断，根据判断的结果决定是否执行循环体，因此又称“前测试型”循环；直到型循环语句则是先执行一次循环体，再对一些条件进行判断，然后根据判断的结果决定是否继续执行循环体，因此又称“后测试型”循环. 也就是说直到型循环语句至少执行一次循环体，而当型循环语句则可能一次也不执行循环体，但二者本质上是相同的，可以互相转化.

本节的编排与上一小节类似，先将循环语句的一般格式与程序框图对照起来，再举例说明循环语句的应用. 教科书利用 1.1.2 中例 5 的程序框图，分别用 WHILE 语句和 UNTIL 语句编写了程序，教师可以引导学生利用这两个具体的程序分析当型循环与直到型循环的异同.

在本小节的最后，教科书将图 1.1-2 中的程序框图转化成了程序. 这样安排的目的，是想用这个完整的程序对算法语句一节作一个总结，并与 1.1.1 中的例 1 和图 1.1-2 中的框图相呼应，帮助学生进一步理解判定质数的算法. 这是一个较复杂的程序，教学中只要求学生能读懂程序，并与相应的算法步骤和程序框图中的步骤逐步对照起来即可. 程序之后的“思考”栏目要求学生探讨对程序进行简化的可能性. 实际上，简化的途径不止一条，例如，对输入的值作限制，要求输入一个大于 2 的数 n，从而略去对 n 是否大于 2 的判断，即省去了最外层的 IF-THEN 语句. 教学中可以引导学生提出其他的改进办法.

本节重点在于引导学生掌握 5 种基本算法语句，所用的例子都是浅显的，教学过程中也可以按照这个原则增加一些例题和备用练习. 条件允许的学校也可以结合信息技术课程，介绍更为准确的算法语句形式，并安排学生上机练习，提高学生的学习兴趣，增加学生的实践机会.

四、习题解答

练 习（第 15 页）

1. 程序：

```
INPUT “华氏温度 F=”; F
C=(F-32) * 5/9
PRINT “相应的摄氏温度 C=”; C
END
```

2. 程序：

```
INPUT “请输入一个非零实数 a=”; a
INPUT “请输入一个非零实数 b=”; b
add=a+b
sub=a-b
mul=a * b
div=a/b
PRINT add, sub, mul, div
END
```

3. 程序：

```
p=(2+3+4)/2
s=SQR(p * (p-2) * (p-3) * (p-4))
PRINT “三角形的面积等于”;s
END
```

4. 程序：

```
INPUT “请输入购买水果糖的质量（千克）”; a
INPUT “请输入购买奶糖的质量（千克）”; b
INPUT “请输入购买巧克力糖的质量（千克）”; c
aa=10.4 * a
bb=15.6 * b
cc=25.2 * c
sum=aa+bb+cc
PRINT “应收取的金额为：” sum
END
```

练 习（第 20 页）

1. 程序：

```
INPUT "请输入3个正实数"; a, b, c
IF a+b>c AND a+c>b AND b+c>a THEN
  PRINT "存在这样的三角形."
  ELSE
    PRINT "不存在这样的三角形."
END IF
END
```

2. 分析：本程序要求输入一个正的两位数 x．若 $9<x<100$，则先取出 x 的十位，记作 a，则取出 x 的个位，记作 b，把它们调换位置，然后输出．如输入 25，则输入 52.

3. 程序：

```
INPUT "请输入一个整数"; a
IF  a  MOD  2 =0
  PRINT "输入的数是一个偶数."
  ELSE
    PRINT "输入的数是一个奇数."
END IF
END
```

4. 程序：

```
INPUT "请输入一个年份"; y
  b=y MOD 4
  c=y MOD 100
  d=y MOD 400
IF  b=0  AND  c<>0  THEN
  PRINT "输入的年份是闰年."
  ELSE
    PRINT "输入的年份不是闰年."
END IF
IF  d=0  THEN
  PRINT "输入的年份是闰年."
  ELSE
    PRINT "输入的年份不是闰年."
END IF
END
```

练 习（第 23 页）

1. 程序：

```
x1=1
x2=2
e=0.005
flag=0
DO
  m=(x1+x2)/2
  f=m^2-2
  IF f =0 THEN
    PRINT "所求根为:"; m
    flag=1
  END IF
  g=x1^2-2
  IF g * f>0 THEN
    x1=m
    ELSE
    x2=m
END IF
LOOP UNTIL  ABS(x1-x2)<e  OR  flag=1
PRINT "所求近似根为:"; x1
END
```

2. 程序：

```
x=1
y=0
DO
  y=x^2-3 * x+5
  PRINT y
  x=x+1
LOOP UNTIL x >20
END
```

3. 程序：

```
INPUT "请输入一个正整数 n="; n
i=1
f=1
WHILE i <=n
  f=f * i
  i=i+1
WEND
PRINT  f
END
```

习题 1.2（第 23 页）

A 组

1. (1) 若输入为"小明"，则输出结果为：Your name is：小明.

   (2) 输出结果为：5! is：120.

2. 程序：

```
INPUT "请依次输入梯形的上底、下底和高："；a，b，h
p=a+b
S=p*h/2
PRINT "梯形的面积为："；S
END
```

3. 程序：

```
INPUT "请输入两个非 0 整数 a 和 b："；a，b
IF  a  MOD  b=0  THEN
  PRINT "a 能被 b 整除."
ELSE
  PRINT "a 不能被 b 整除."
END IF
END
```

4. 程序：

```
INPUT "请输入 n 的值"；n
i=1
sum=0
WHILE i<=n
sum = sum+(i+1)/i
i=i+1
WEND
PRINT "n 个数的和等于"；sum
END
```

5. 程序：

```
INPUT "请输入 m 和 n 的值"；m，n
i=1
p=1
WHILE i<= n
p=p*i
i=i+1
```

```
WEND
i=1
q=1
WHILE i <=m
q= q * i
i=i+1
WEND
i=1
m=1
WHILE i <=(n-m)
m=m * i
i=i+1
WEND
c1=p/(q * m)
PRINT c1
END
```

B 组

1. 程序：

```
n=1
p=1000
WHILE n<=7
  p=p+p * (1+50%)
  n=n+1
WEND
PRINT p
END
```

2. 程序：

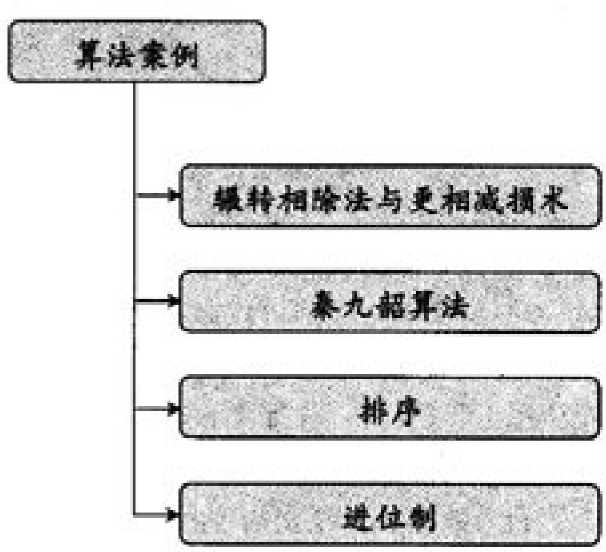
```
INPUT "请输入 x 的值"; x
IF   x<1    THEN
  y=x
END IF
IF   x>=1    AND    x<10    THEN
  y=2 * x-1
END IF
IF   x>=10    THEN
  y=3 * x-11
END IF
PRINT "y="; y
END
```

3. 程序：

```
INPUT "请输入一个数字 a"; a
INPUT "请输入加数的个数 n"; n
tn=0
sn=0
i=1
WHILE  i<=n
  tn=tn+a
  sn=sn+tn
  a=a*10
  i=i+1
WEND
PRINT  sn
END
```

1.3 算法案例

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：通过 4 个典型的算法案例，使学生通过模仿、操作、探索，经历通过设计程序框图表达解决问题的过程，以及将程序框图转化为程序语句的过程，帮助学生进一步体会算法的基本思想，以及算法在解决问题的过程中所体现的特点.

难点：理解算法案例的内容以及具体算法的关键步骤.

三、编写意图与教学建议

教科书选择了4个有典型性的、又有一定难度的算法案例，这些案例的教学都不要求画完整的程序框图以及编写完整的算法程序，也不要求学生记忆它们的具体步骤，教学中要注意把握这种要求，适当控制教学难度.

辗转相除法是西方古代数学中的一个典型算法，更相减损术和秦九韶算法都是我国古代数学中的著名算法，而排序法和进位制算法则是计算机科学中普遍使用的算法. 与前面介绍的算法相比，这4个算法较为复杂，其中蕴涵的算法思想更为深刻，也更能体现算法的重要性和有效性.

教学中，要注意抓住这4个算法的关键步骤，引导学生理解其中的"算理". 教师可以通过讲解、画程序框图、举简单例子说明、让学生自己归纳等多种手段，帮助学生克服理解上的困难.

1. "辗转相除法与更相减损术"的设计意图与教学建议.

"辗转相除法"是欧几里得《原本》中记录的一个算法："设有不相等的二数，若依次从大数中不断地减去小数，若余数总是量不尽它前面一个数，直到最后的余数为一个单位，则该二数互质."

这个算法的关键步骤是做带余除法

$$m_1=n_1q_1+r_1(0\leqslant r_1<n_1).$$

由上式可以看出，m_1、n_1 和 n_1、r_1 有相同的公约数，因此也有相同的最大公约数，可表示为 $\gcd(m_1, n_1)=\gcd(n_1, r_1)$（gcd 是 greatest common divisor 的简写）.

当 $r_1=0$ 时，$\gcd(m_1, n_1)=n_1$.

当 $r_1>0$，令 $m_2=n_1$，$n_2=r_1$，继续做带余除法：

$$m_2=n_2q_2+r_2(0\leqslant r_2<n_2),$$
$$m_3=n_3q_3+r_3(0\leqslant r_3<n_3),$$
$$\cdots\cdots$$

由于 $r_1>r_2>r_3>\cdots$，因此 r 在有限次地减小之后，总可以达到0.

设 $r_k=0$，则有

$$m_k=n_kq_k.$$

故 $\gcd(m_1, n_1)=\gcd(m_2, n_2)=\gcd(m_3, n_3)=\cdots=\gcd(m_k, n_k)=q_k$.

以上是辗转相除法的"算理". 教师可以在求两个具体数（如8 251与6 105）的最大公约数的过程中，讲述上面的"算理"，突出递归的作用. 教师可以多举几个例子，通过具体例子来说"理"，以利于学生更好地把握"算理"，而不要把上述抽象的式子和符号直接地呈现给学生.

教科书在这部分安排了一个"思考"栏目："你能把辗转相除法编成一个计算机程序吗?"教学时可以先引导学生思考："辗转相除法中的关键步骤是哪种逻辑结构?"然后，帮助学生认识在这一算法中，带余除法是一个反复执行、直到余数等于0停止的步骤，这实际上是一个循环结构. 教科书还画出了这个循环结构的程序框图（图1），以帮助学生进一步地、直观地理解这一步骤. 有了上面的准备，就可以让学生自己写出辗转相除法的程序了.

教科书在这部分还介绍了中国古代算法中的"更相减损术"，与辗转相除法形成对比. 尽管这两种算法分别来源于东西方古代数学名著，但二者的算理却是相似的，有异曲同工之妙. 主要区别在于辗转相除法进行的是除法运算，即辗转相除；而更相减损术进行的是减法运算，即辗转相减，但实质都是一个不断的递归过程. 教科书如此设计的意图是想让学生在比较两种算法的过程中，使学生对递归思想能有一个初步的认识.

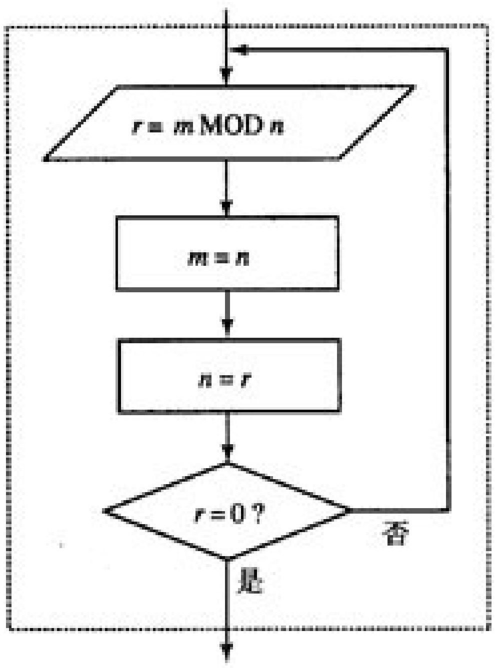


图 1

```
INPUT m, n
DO
  r=m MOD n
  m=n
  n=r
LOOP UNTIL  r=0
PRINT  m
END
```

辗转相除法的程序

例 1 的教学中，教师可以先让学生自己按照更相减损术的步骤，逐步求出 98 与 63 的最大公约数. 然后，再引导学生思考在第一步

$$98-63=35$$

中，98 与 63 和 63 与 35 有相同的约数，因此也有相同的最大公约数，可表示为 gcd(98，63)=gcd(63，35). 由于 $63\neq35$，继续做减法. 由于每一步中得到的减数及差都是正数，且它们的值在逐渐减小，所以经过有限步后，总会出现减数与差相等的情况. 在本例中，我们可以得到gcd(98，63)=gcd(63，35)=gcd(35，28)=gcd(28，7)=gcd(14，7)=gcd(7，7)，所以 98 和 63 的最大公约数等于 7.

讲解完本例后，可以让学生做 36 页的练习第 1 题.

2. "秦九韶算法"的设计意图与教学建议.

秦九韶算法是求一元多项式的值的一种方法. 在初中，学生已经学习了多项式的有关知识，那里是把多项式看作代数表达式. 因此在本段内容的教学之前，应当先向学生说明，这里是用函数的观点考察多项式，因此，求自变量取某个实数时的函数值问题，即求多项式的值就是一个常规问题. 实际上，在解决数学问题和实际问题中，常需要求多项式的值.

教科书在正式介绍秦九韶算法之前，先让学生自己求一元多项式 $f(x)=x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ 当 $x=5$ 时的值，学生可能会想到很多算法. 教科书对两种算法的运算效率进行了比较与分析，这样做的目的是为了使学生了解，解决同一个问题的算法可能有很多种，但算法有"好""坏"之分，其判断标准之一是运算的效率. 这里通过统计乘法和加法的运算次数来衡量算法的好坏，并为下面说明秦九韶算法的有效性做铺垫. 但是关于计算的复杂性问题，在教学中不宜过多涉及. 教科书也只是从"讲故事"的角度说明了某些算法计算机是无法执行的，以提高学生学习的兴趣.

接着，教科书引入了秦九韶算法，这个算法的特点在于把求一个 n 次多项式的值转化为求 n 个一次多项式的值，即把求 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的值转化为求递推公式

$$\begin{cases}v_0=a_n,\\ v_k=v_{k-1}x+a_{n-k}\,(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\end{cases}$$

中 v_n 的值. 通过这种转化，把运算的次数由至多 $\frac{(1+n)n}{2}$ 次乘法运算和 n 次加法运算，减少为至多 n

次乘法运算和 n 次加法运算，大大提高了运算效率.

教师可以使用几个具体的例子，即对具体多项式的分解、转化求值来讲解秦九韶算法，然后再归纳出教科书上用一般形式给出的算法. 这时还可以提醒学生，用递推公式表示的步骤都可以用循环结构来实现.

下面介绍一种表示秦九韶算法的直观方法. 例如计算当 $x=5$ 时，多项式 $f(x)=2x^4-6x^3-5x^2+4x-6$ 的值.

由于

$$\begin{aligned} f(x)&=2x^4-6x^3-5x^2+4x-6\\ &=(2x^3-6x^2-5x^2+4)x+6\\ &=(((2x-6)\ x-5)x+4)x+6, \end{aligned}$$

根据秦九韶算法，我们有

$$2x-6=2\times5-6=4,$$
$$4x-5=4\times5-5=15,$$
$$15x+4=15\times5+4=79,$$
$$79x+6=79\times5+6=389.$$

列成表表示为

	2	−6	−5	4	6	⟶ 原多项式的系数
$x=5$		10	20	75	395	
		4	15	79	389	⟶ 多项式的值

教科书在这部分的最后，还画出了程序框图帮助学生进一步熟悉算法步骤. 教师可以在总结这部分内容时，要求学生自己画出求 $n=4$ 或 5 的一元多项式的秦九韶算法的程序框图.

教学中，可以结合《九章算术》、秦九韶的生平和他的著作《数书九章》，向学生介绍中国古代数学的特点、成就和对世界数学发展的贡献. 例如，尽管秦九韶算法是距今 700 多年前提出的，但现在仍然是多项式求值的比较先进的算法；秦九韶是享誉世界的数学家，美国当代数学史家萨顿(G. Sarton)说，秦九韶是“他那个民族、他那个时代、并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”.

3. “排序”的设计意图与教学建议.

教科书将“排序”作为一个典型的算法案例来介绍，主要有两个原因，一是排序算法的操作性较强，能够充分体现算法的特征；二是排序是计算机程序设计中的一种重要操作，在程序设计实践中得到广泛应用. 所谓排序，就是使一串“记录”，按照其中的某个或某些关键字的大小，递增或递减地排列起来的操作. 排序算法有很多种，排序的对象也五花八门. 教科书选择“数”作为排序对象，排序的依据是数的大小，介绍了两种常见的排序方法——直接插入排序和冒泡排序，以帮助学生理解排序的思想.

直接插入排序法的思想是从第 1 个数开始，依次把每个数插入到已排好序的序列的适当位置，直到完成对最后一个数的操作. 冒泡排序则是先设想将待排序的一组数竖直排列，而将其中的每个数都想像为重量为数值的气泡. 根据较轻的气泡不能位于较重的气泡之下的原则，自上而下比较相邻的两个气泡，并调整它们的位置，使得轻气泡“上浮”，重气泡“下沉”，直到最后任何两个相邻的气泡都是轻者在上，重者在下.

教师可以先给学生一组数（如 8，3，2，5，9，6），让他们从小到大进行排序并说明操作过程，然后分别展示用直接插入排序法和冒泡排序法对这组数排序的过程，在展示的过程中可以借助类似于教科书上图 1.3-4 和图 1.3-5 的图示. 由于这两种排序方法操作性强，容易理解，教师可以多举几个

例子让学生练习，还可以让学生自己归纳出算法中包含的“算理”.

实际上，直接插入排序和冒泡排序是计算机程序设计中两种简单的排序方法，相对于一些复杂的排序方法（如快速排序），它们占用计算机内存的空间比较大，需要的时间也比较长．条件允许时，教师可以向学生介绍一些其他的排序方法．教科书也相应地安排了一个探究栏目，引导学生自己探索其他的排序法．例如，一部丛书的编写委员会有 20 人，现要把这 20 人的名字按照字母顺序排序，我们可以先把这 20 人的名字按照姓氏的首字母分成 4 组，即首字母为 $a\sim f$，$g\sim l$，$m\sim s$，$t\sim z$ 的名字分别作为一组，然后分别对这四组中的名字进行排序，再将排序的结果合起来，最后检查并调整组与组交接处的名字的排序.

4.“进位制”的设计意图与教学建议.

由于在不同的进位制转换中存在有趣的算法，而且进位制本身及其转换属于计算机的基础知识，有助于了解计算机的工作原理，因此教科书选择了“进位制”作为第 4 个算法案例，同时还介绍了进位制数的表示方法等相关知识.

在内容编排上，教科书首先介绍了进位制的定义和进位制数的形式表示．一个 k 进制数可以表示成一般形式：

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(k)} (0 < a_n < k, 0 \leqslant a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 < k), \qquad ①$$

对于这种表示的理解学生可能有一定的困难，教学中应当让学生明确两个要点，一是第 1 个数字 a_n 不能等于 0，二是每一个数字 a_n，a_{n-1}，…，a_0 都必须小于 k．除了十进制数和二进制数，常见的还有 16 进制数，由于其中需要表示超过 10 的数字，规定字母 $A\sim E$ 对应 10～16，例如 $C7A16_{HEX}=12\times16^4+7\times16^3+10\times16^2+1\times16^1+6\times16^0=817\ 686$.

教科书设计了一个思考栏目，要求学生把一般形式①写成各位上数字与 k 的幂的乘积之和的形式．教师可以让学生先把十进制数、二进制数等表示成各位上数字与 k 的幂的乘积之和的形式，再对一般的形式进行操作就不难了，即有

$$a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(k)} = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \cdots + a_1 \times 10 + a_0 \times 10^0. \qquad ②$$

关于进位制之间的转换，教科书以十进制和二进制之间的转换为例进行讲解，并推广到十进制和其他进制之间的转换．这样做的原因是，计算机是以二进制形式来存储和计算数据的，而一般我们输入给计算机的数据是十进制数，因此计算机必须将十进制数转换为二进制数，而把运算结果由二进制数转换为十进制数输出.

非十进制数转换为十进制数比较简单，只要计算②式中等号右边的值，就得到了相应的十进制数．描述为算法步骤是：

第一步，从左到右依次取 k 进制数 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(k)}$ 各位上的数字，乘以相应 k 的幂，k 的幂从 n 开始取值，每次递减 1，递减到 0，即 $a_n\times k^n$，$a_{n-1}\times k^{n-1}$，…，$a_1\times k^1$，$a_0\times k^0$；

第二步，把所得到的乘积加起来，所得的结果就是相应的十进制数.

在教科书提供的一个把 k 进制数 a（共有 n 位）转化成十进制数 b 的程序中，就使用了这个算法．其中的 GET 函数用于取出 k 进制数各位上的数字，并不要求学生了解它为什么能实现这样的功能.

把十进制数转换为二进制数可用教科书上提供的“除 2 取余法”，教师可以展示算法过程，让学生来总结算法步骤．“除 k 取余法”是把十进制数转换为 k 进制数的算法，如例 6 把十进制数转换为五进制数.

另外，教师还可以引导学生思考，怎样在非十进制之间实现转换，一个自然的想法是利用十进制作桥梁．这里提供一种二进制与 16 进制之间互化的方法，这也是实际使用的方法之一．下表是 16 进制数与二进制数的对照表，利用这个表，就可以逐段进行转换了.

二进制	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111
16进制	0	1	2	3	4	5	6	7
二进制	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
16进制	8	9	A	B	C	D	E	F

例如，

$$C7A16_{(16)}=1100\ 0111\ 1010\ 0001\ 0110_{(2)}.$$

5. 阅读与思考“割圆术”的教学建议.

教科书设计本阅读材料的意图是：

（1）“割圆术”这个算法本身很有趣，操作性强，“算理”明确，借助图形来讲解易懂易学；

（2）“割圆术”是由中国古代的数学家刘徽提出的，是当时计算圆周率的比较先进的算法，至今仍具有一定的应用价值；

（3）“割圆术”能被翻译成计算机程序上机运行，这体现了中国古代数学的算法特征；

（4）围绕着圆周率的计算这个问题有很多有趣的故事，例如可以讲述从古至今许多数学家孜孜不倦地计算圆周率的故事，还可以介绍一些经典而有趣的算法，等等，这些都会对学生有一定的吸引力.

教科书首先介绍了“割圆术”的算法步骤，这个算法的关键思想是用内接正多边形和外切正多边形“内外夹逼”圆，则圆的面积值在二者的面积值中间，而圆的半径是“1”，因此圆的面积值即为圆周率的值．接着，教科书选取了“割圆术”的一部分，即用内接正多边形逼近圆周率，经分析整理后，确定了其中的递归关系，并写出了相应的计算机程序．这个程序输入的是用于逼近圆的内接正多边形的边数 $n=6k(k\in\mathbf{N}^*$，且 $k\geqslant 2)$，输出的是内接正多边形的边数和它的面积（即圆周率的近似值）.

学生在学习本材料时可能遇到的困难是理解“割圆术”中的“内外夹逼”的思想和递推关系，教师可在这两个环节加以指导.

四、教学设计案例

1.3 算法案例——秦九韶算法（约2课时）

1. 教学任务分析

（1）在学习中国古代数学中的算法案例的同时，进一步体会算法的特点.

（2）体会中国古代数学对世界数学发展的贡献.

2. 教学重点与难点

重点：理解秦九韶算法的思想.

难点：用循环结构表示算法步骤.

3. 教学基本流程

设计算法，求具体多项式的值

↓

改进算法，提高运算效率

↓

介绍秦九韶算法，求一般多项式的值

↓

用循环结构表示秦九韶算法的关键步骤

↓

对秦九韶算法和算法本身的特点进行小结

4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师　生　活　动
(1) 设计求多项式 $f(x)=2x^5-5x^4-4x^3+3x^2-6x+7$ 当 $x=5$ 时的值的算法，并写出程序.	使学生在自己操作的过程中进一步认识问题本身及其算法.	学生提出一般的解决方案，如： x=5 f=2*x^5-5*x^4-4*x^3+3*x^2-6*x+7 PRINT "f="; f END 教师点评：上述算法一共做了 15 次乘法运算，5 次加法运算. 优点是简单，易懂，缺点是不通用，不能解决任意多项式的求值问题，而且计算效率不高.
(2) 有没有更高效的算法？	帮助学生建立改进算法、提高计算效率的意识.	师：计算 x 的幂时，可以利用前面的计算结果，以减少计算量，即先计算 x^2，然后依次计算 $x^2\cdot x$，$(x^2\cdot x)\cdot x$，$((x^2\cdot x)\cdot x)\cdot x$ 的值. 这样计算上述多项式的值，一共需要多少次乘法，多少次加法？ 生：9 次乘法运算，5 次加法运算. 师：第二种做法与第一种做法相比，乘法的运算次数减少了，因而能提高运算效率. 而且对于计算机来说，做一次乘法所需的运算时间比做一次加法要长得多，因此第二种做法能更快地得到结果.
(3) 能否探索更好的算法，来解决任意多项式的求值问题？	进一步探索具有一般意义的算法.	教师引导学生把多项式变形为： $f(x)=2x^5-5x^4-4x^3+3x^2-6x+7$ $=((((2x-5)x-4)x+3)x-6)x+7$， 并提问：从内到外，如果把每一个括号都看成一个常数，那么变形后的式子中有哪些“一次式”？x 的系数依次是什么？ 生：$2x-5$，$Ax-4$，$Bx+3$，$Cx-6$，$Dx+7$ 共 5 个一次式，x 的系数依次是 2，$2x-5$，$(2x-5)x-4$，$((2x-5)x-4)x+3$，$(((2x-5)x-4)x+3)x-6$.

续表

<table>
<tr><th>问　题</th><th>问题设计意图</th><th>师　生　活　动</th></tr>
<tr><td>（4）若将 x 的值代入变形后的式子中，那么求值的计算过程是怎样的？</td><td>引导学生发现规律，归纳总结.</td><td>师：计算的过程可以列表表示为：
<table>
<tr><td>原多项式 x 系数</td><td>2</td><td>−5</td><td>−4</td><td>3</td><td>−6</td><td>7</td><td>运算</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>10</td><td>25</td><td>105</td><td>540</td><td>2 670</td><td>+</td></tr>
<tr><td>变形后 x 的“系数”</td><td>2</td><td>5</td><td>21</td><td>108</td><td>534</td><td>2 677</td><td>×5</td></tr>
</table>
最后的系数 2 677 即为所求的值. 让学生描述上述计算过程.
生：将变形前 x 的第 1 个系数乘以 x 的值，加上变形前第 2 个系数，得到一个新的系数；将此系数继续乘以 x 的值，再加上变形前第 3 个系数，又得到一个新的系数；继续对新系数做上面的变换，直到与变形前最后一个系数相加，得到一个新系数为止. 这个系数即为所求的多项式的值.
师：指出这种算法就是“秦九韶算法”，同时介绍秦九韶的生平.</td></tr>
<tr><td>（5）用秦九韶算法求多项式的值，与多项式的组成有直接关系吗？用秦九韶算法计算上述多项式的值，需要多少次乘法运算和多少次加法运算？</td><td>引导学生分析秦九韶算法的特点.</td><td>教师引导学生发现在求值的过程中，计算只与多项式的系数有关. 让学生统计所进行的乘法和加法运算的次数.
生：共做了 5 次乘法运算，5 次加法运算.</td></tr>
<tr><td>（6）秦九韶算法适用于一般的多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的求值问题吗？</td><td>说明秦九韶算法的通用性.</td><td>师：怎样用秦九韶算法求一般的多项式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 当 $x=x_0$ 时的值？
生：先将多项式变形为
$$\begin{aligned}f(x)&=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\\&=(\cdots(a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0,\end{aligned}$$
然后由内向外逐层计算一次多项式的值.
教师引导学生思考：把 n 次多项式的求值问题转化成求 n 个一次多项式的值的问题，即求
$$\begin{aligned}&v_1=a_nx+a_{n-1},\\&v_2=v_1x+a_{n-2},\\&v_3=v_2x+a_{n-3},\\&\cdots\cdots\\&v_n=v_{n-1}x+a_0\end{aligned}$$
的值的过程，共做了多少次乘法运算，多少次加法运算？
生：n 次乘法运算，n 次加法运算.</td></tr>
<tr><td>（7）怎样用程序框图表示秦九韶算法？</td><td>引导学生认识秦九韶算法中的循环过程，并用算法的循环结构来表示这个过程.</td><td>师：观察秦九韶算法的数学模型，计算 v_k 时要用到 v_{k-1} 的值. 若令 $v_0=a_n$，我们可以得到下面的递推公式：
$$\begin{cases}v_0=a_n,\\v_k=v_{k-1}x+a_{n-k}\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).\end{cases}$$
这是一个在秦九韶算法中反复执行的步骤，可以用循环结构来实现.
生：画程序框图.</td></tr>
</table>

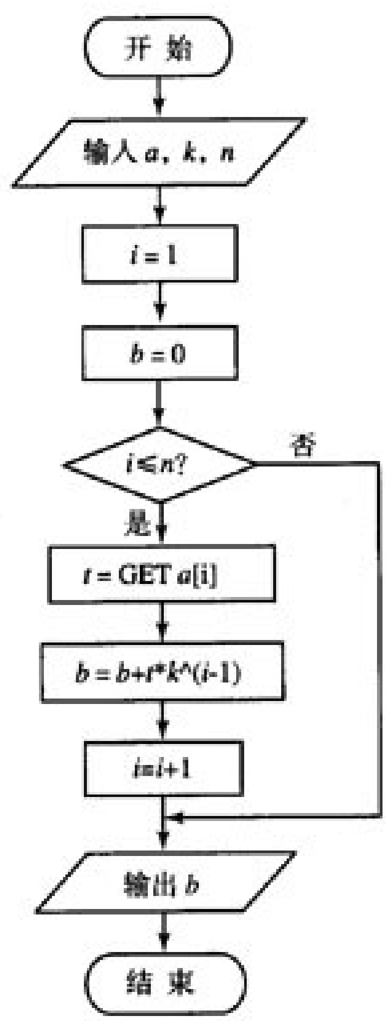
续表

问 题	问题设计意图	师 生 活 动
(8) 小结：通过对秦九韶算法的学习，你对算法本身有哪些进一步的认识?	进一步体会算法的特点.	教师引导学生思考、讨论、概括．小结时要关注如下几点：(1) 算法具有通用的特点，可以解决一类问题；(2) 解决同一类问题，可以有不同的算法，但计算的效率是不同的，应该选择高效的算法；(3) 算法的种类虽多，但三种逻辑结构可以有效地表达各种算法；等等.
(9) 课后作业：习题 1.3A 组第 2 题.		

五、习题解答

练 习（第 36 页）

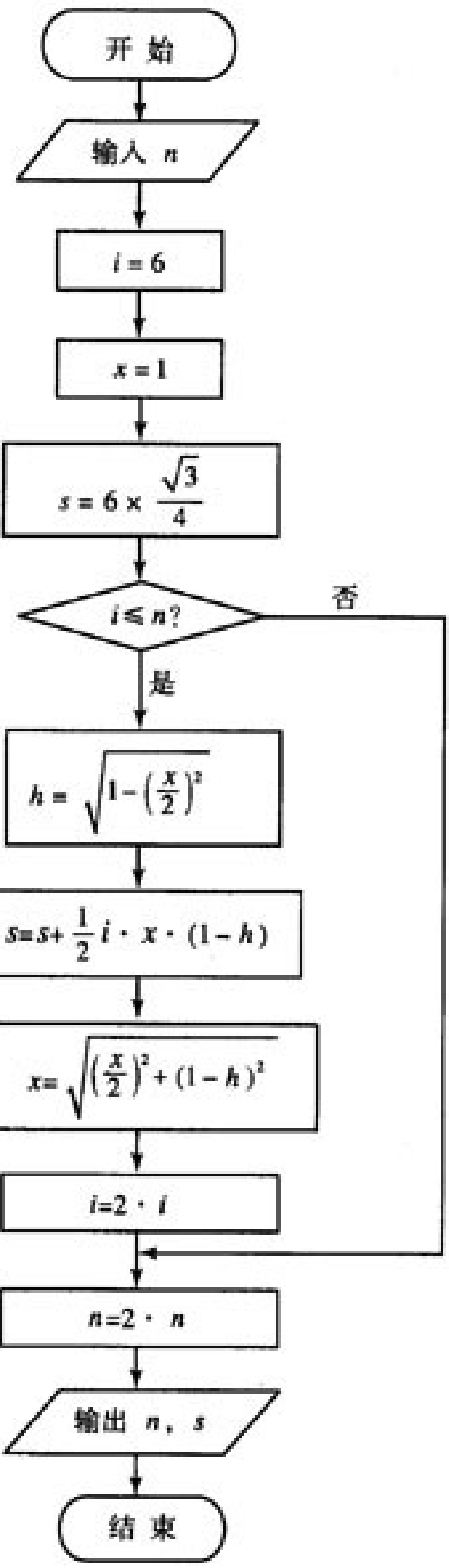
1. (1) 45；(2) 98；(3) 24；(4) 17.
2. 当 $x=5$ 时，$f(x)=2\ 881.75$.
3. 略.
4.



习题1.3（第38页）

A组

1. (1) 57；(2) 55.
2. 21 324.
3. 略.
4. (1) 104；(2) $212_{(7)}$；(3) 1 278；(4) $315_{(6)}$.
5.



B组

1. 算法步骤：

第一步：输入45名学生的数学成绩 $a(1)$，$a(2)$，…，$a(n)$；

第二步：用变量flag1，flag2和flag3分别记录属于[0，60)[60，80)和[80，100]的成绩的个数，将

它们的初值都取为 0；

第三步：当 i 从 1 到 45 取值时，依次判断 $a(i)$的大小，如果 $0\leqslant a(i)<60$，则使变量 flag1 的值增加 1；如果 $60\leqslant a(i)<80$，则使变量 flag2 的值增加 1；如果 $80\leqslant a(i)\leqslant 100$，则使变量 flag3 的值增加 1；

第四步：输出 flag1，flag2 和 flag3 的值.

2. 如“出入相补”——计算面积的方法，“垛积术”——高阶等差数列的求和方法，等等.

复习参考题（第 40 页）

A 组

1.

```
INPUT "请输入应该字母:"; x
IF x = C THEN
  PRINT "x="; G
END IF
IF x = h THEN
  PRINT "x="; l
END IF
IF x = i THEN
  PRINT "x="; m
END IF
IF x = n THEN
  PRINT "x="; r
END IF
IF x = a THEN
  PRINT "x="; e
ELSE
  PRINT "?"
END IF
END
```

2.

```
INPUT "请输入 a1, b1, c1, a2, b2, c2 的值:"; a1,
b1, c1, a2, b2, c2
IF   a1=0   THEN
  y=-c1/b1
  x=(c2-b2*y)/a2
ELSE
  u=-a2/a1
  b=b2+b1*u
  c=c2+c1*u
  y=c/b
  x=(c2-b2*y) /a2
END IF
PRINT x, y
END
```

3. (1)

```
INPUT "请输入x的值:"; x
IF  x<0  THEN
  y=0
END IF
IF  x>=0  AND  x<1  THEN
  y=1
END IF
IF  x>=1  THEN
  y=x
END IF
PRINT "y="; y
END
```

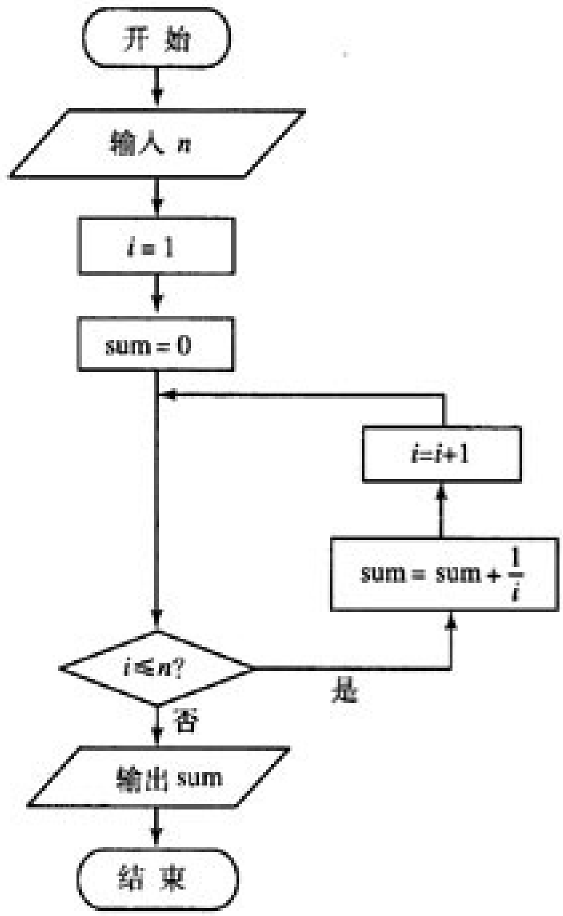
(2)

```
INPUT "请输入x的值:"; x
IF   x<0   THEN
  y= (x+2)^2
END IF
IF   x=0   THEN
  y=4
END IF
IF   x>0   THEN
  y=(x-2)^2
END IF
PRINT "y="; y
END
```

4.

```
INPUT "请输入通话时间（单位: s)"; t
IF   t<0    THEN
  PRINT "通话时间应大于零."
END IF
IF   0<t<=180 THEN
  y=0.30
  PRINT "请交纳话费（单位: 元)"; y
ELSE
  y=0.1*t
  PRINT "请交纳话费（单位: 元)"; y
END IF
END
```

5. 程序框图为：



6. 算法 1：

第一步：输入 10 个数.

第二步：用冒泡排序法将这 10 个数从小到大进行排序.

第三步：输出排序所得序列中的第一个数（即最小值）和最后一个数（即最大值）.

算法 2：

第一步：输入 10 个数.

第二步：计算这 10 个数的平均数.

第三步：依次比较 10 个数与平均数的大小，若大于或等于平均数，放在第 1 组；若小于平均数，放在第 2 组.

第四步：用冒泡排序法分别对两组数从小到大进行排序.

第五步：输出第 1 组中的最后一个数（即最大值）和第 2 组中的第一个数（即最小值）.

7. 略.

B 组

1.

```
INPUT "请输入一个大于 0 的整数"；n
IF n MOD 7=0   THEN
  PRINT "Sunday"
END IF
IF n MOD 7=1   THEN
  PRINT "Monday"
```

```
END IF
IF n MOD 7=2    THEN
  PRINT "Tuesday"
END IF
IF n MOD 7=3    THEN
  PRINT "Wednesday"
END IF
IF n MOD 7=4    THEN
  PRINT "Thursday"
END IF
IF n MOD 7=5    THEN
  PRINT "Friday"
END IF
IF n MOD 7=6    THEN
  PRINT "Saturday"
END IF
END
```

2. 略.

3. 算法步骤：

第一步：输入一个正整数 x 和它的位数 n.

第二步：判断 n 是不是偶数，如果 n 是偶数，令 $m=\frac{n}{2}$；如果 n 是奇数，令 $m=\frac{n-1}{2}$.

第三步：当 i 从 1 到 m 取值时，依次判断 x 的第 i 位与第$(n+1-i)$位上的数字是不是相等，如果都相等，则 x 是回文数；否则，x 不是回文数.

4.

```
i=100
sum=0
k=1
WHILE   k<=10
  sum=sum+i
  i=i/2
  k=k+1
WEND
PRINT "向下的运动共经过（单位：m）："; sum
PRINT "第 10 次着地后反弹（单位：m）："; i
PRINT "全程共经过（单位：m）："; 2*sum-100
END
```

III 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）

1. 登上一个四级的台阶，可以选择的方式共有（　　）种.

(A) 3　　(B) 4　　(C) 5　　(D) 6

2. 用二分法求方程的近似根，精确度为 e，则循环结构的终止条件是（　　）.

(A) $|x_1-x_2|>e$　　(B) $x_1=x_2=e$　　(C) $x_1<e<x_2$　　(D) $|x_1-x_2|<e$

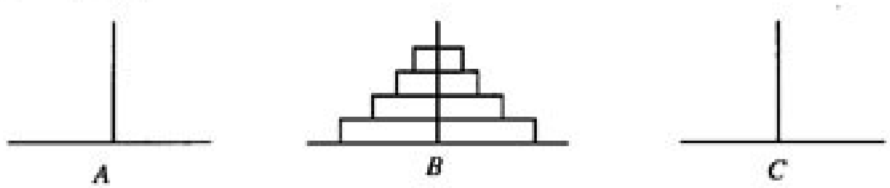
3. 用冒泡法对 43，34，22，23，54 从小到大进行排序，需要（　　）趟排序.

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

4. 把 389 化成四进制数的末位为（　　）.

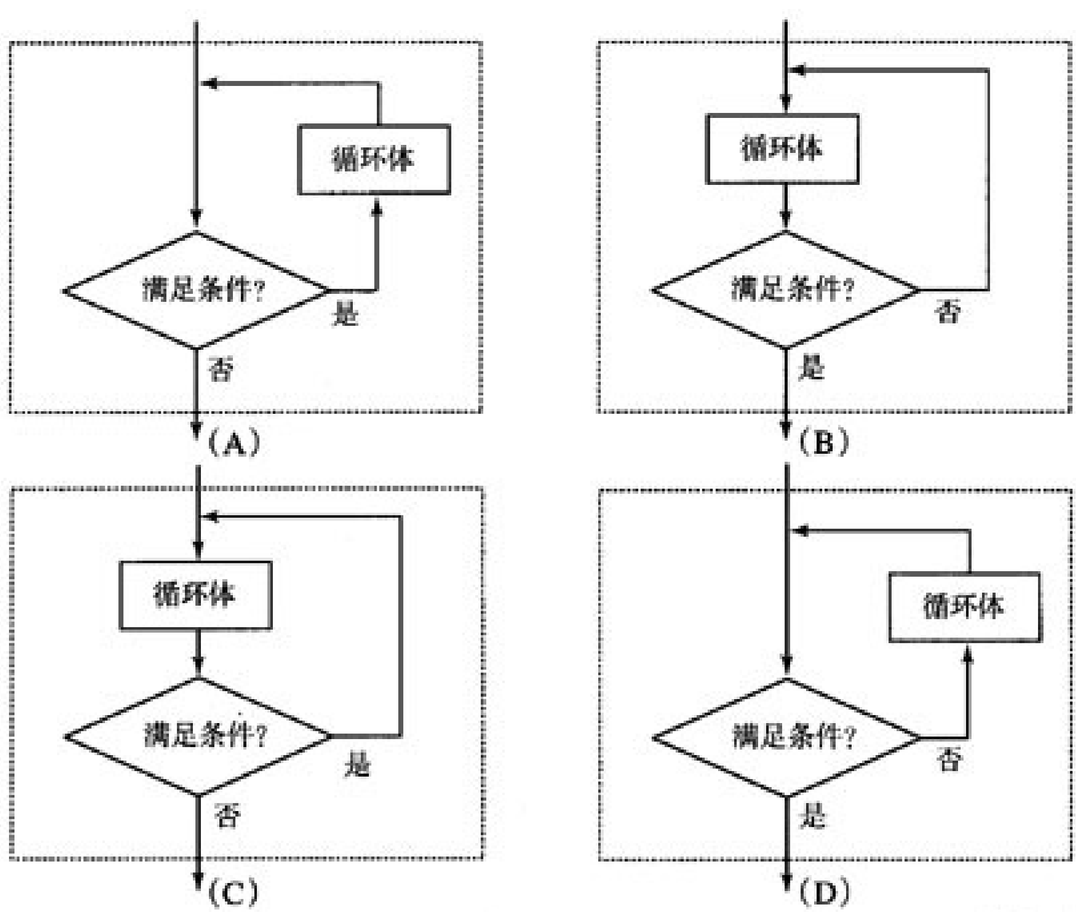
(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 0

5. 如图，汉诺塔问题是指有 3 根杆子 A，B，C. B 杆上有若干碟子，把所有碟子从 B 杆移到 A 杆上，每次只能移动一个碟子，大的碟子不能叠在小的碟子上面. 把 B 杆上的 4 个碟子全部移到 A 杆上，最少需要移动（　　）次.



(A) 12　　(B) 15　　(C) 17　　(D) 19

6. 直到型循环结构为（　　）.



二、填空题

7. 用秦九韶算法计算当 $x=5$ 时，多项式 $f(x)=5x^5+4x^4+3x^3+2x^2+x+1$ 的值为______.

8. 魔方阵是指由 $1\sim n^2$ 共 n^2（$n\in\mathbf{N}^*$，且 n 是奇数）个数组成的方阵：每一行、每一列和对角线之和均相等，写出一个当 $n=3$ 时的魔方阵______.

三、解答题

9. 设$\{F_n\}$是斐波那契数列，则 $F_1=F_2=1$，$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$，画出程序框图，表示输出斐波那契数列的前 20 项的算法.

10. 编写程序，输入 3 个数，输出其中最大的数.

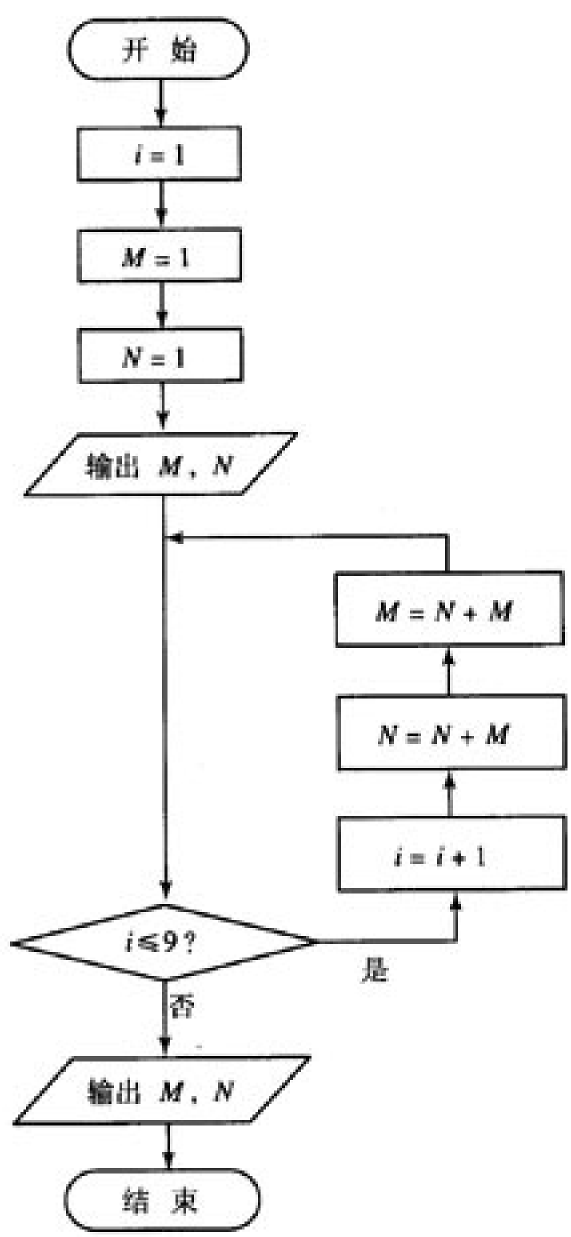
参考答案：

1. C；　2. D；　3. A；　4. A；　5. B；　6. B；　7. 18 556；

8.

3	6	3
4	4	4
5	2	5

9.



10.

```
INPUT "请输入 3 个数：";A，B，C
BIG=A
IF  B>BIG  THEN
  BIG=B
END IF
IF  C>BIG  THEN
  BIG=C
END IF
PRINT "最大的数等于：";BIG
END
```

Ⅳ 拓展资源

1. 英文字典 Merriam-Webster 中关于算法"algorithm"的解释

A procedure for solving a mathematical problem (as of finding the greatest common divisor) in a finite number of steps that frequently involves repetition of an operation. Broadly, a step-by-step procedure for solving a problem or accomplishing some end especially by a computer.

2. 一般说来，算法有下面的特点

通用性（适用性） 算法应适用于某一类问题中的所有个体，而不是只用来解决一个具体问题．如辗转相除法可以用来求任意两个数的最大公约数．

能行性 算法应有明确的步骤一步一步地引导计算的进行，即每一步对于利用算法解决问题的人或计算机来说都是可读的、可执行的，并且能够得到最终结果．

明确性 算法下一步应执行的步骤必须明确——或者由规则直接确定，或者由规则和上一步的结果确定，而不需要计算者临时动脑筋．

有限性 算法应由有限步组成；至少对某些输入数据，算法应在有限多步内结束，并给出计算结果．

离散性 算法的输入数据和输出数据都应该是离散的符号（或称字母，其中也包括数字）．例如不能输入一条曲线．

3. 关于程序框图的三种基本逻辑结构

用程序框图表示的算法，比用自然语言表示的算法更加明确简练、形象直观、流向清楚，而且容易转化成程序语句．

1966 年，美国的 Bohra 和 Jacopini 证明了程序设计语言中只要有三种基本逻辑结构——顺序结构、条件结构和循环结构，就足以表示出各种各样的其他形式的结构，这三种基本结构是一个良好算法的基本单元．已经证明，由以上三种基本结构顺序组成的算法，可以解决任何复杂的问题．

顺序结构、条件结构和循环结构有以下共同的特点：

（1）只有一个入口；

（2）只有一个出口；

（3）每一个基本结构中的每一个框，都应当有一条从入口到出口的路径通过它；

（4）结构内不存在“死循环”.

4. 计算的复杂性

计算的复杂性测度函数有三类：一类是指数型的，常写为c^n的形式（c是常数）；一类是多项式型的，常写为n^k的形式（k为非负整数）；另一类是对数型的，常写为$\log n$的形式. 具有这些复杂性的问题分别称为指数复杂性，多项式复杂性和对数复杂性.

人们习惯于把理论上可计算的问题类称为能行可计算的，而把具有多项式复杂性的问题类称为有效可计算的，通常称为P问题. NP问题是指还未找到多项式复杂性算法的问题.

研究和实验表明，单纯靠提高计算机速度并不能解决NP问题. 例如，根据某些计算机的运行记录，对于复杂性为2^n的问题，即使计算机速度提高1 000倍，也只能是多算约10道题. 于是，人们认为，解决NP问题的关键是要从数学上找出好的算法. 事实上，数学家们也找到了各种各样的好办法，大大简化了计算. 例如，用计算机对卫星照片进行处理，如果在一张10 cm^{2}的照片上以一微米为间隙打上格子，则处理一张照片需要进行10^{16}次运算，即使用每秒百亿次的计算机也要连续算上十多个昼夜. 后来，有人发明了一种好的算法，大大降低了计算的复杂性，使得用同样的计算机计算只需要$\frac{1}{3}$秒.

5. 筛选质数的算法——Eratosthenes筛法

例如，要把100以内的质数筛选出来，Eratosthenes筛法的过程如下：

先把2～100的正整数全部按大小次序排列出来，再把2后面所有2的倍数划去，然后是3的倍数，5的倍数，7的倍数……最后剩下的数就是100以内的质数.

		2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~
~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19
~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29
~~30~~	31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~
~~40~~	41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~
~~50~~	~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59
~~60~~	61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~
~~70~~	71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79
~~80~~	~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89
~~90~~	91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	~~99~~
~~100~~									

划去7的倍数后，就得到了全部25个100以内的质数.

6. “割圆术”的续——π的其他计算方法

（1）1593年，韦达建立了一个优美公式

$$\frac{2}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}\cdots$$

据说，这是关于 π 的最早的表达式. 利用这个公式，通过一系列的加、乘、除和开平方就可算出 π 值.

1844 年，达塞利用公式

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$$

把 π 值算到了小数点后 200 位.

(2) 在 1777 年出版的《或然性算术实验》一书中，蒲丰提出了用实验方法计算 π 值，具体的方法是：找一根粗细均匀，长度为 d 的细针，并在一张白纸上画上一组间距为 l 的平行线（方便起见，常取 $l=\frac{d}{2}$），然后一次又一次地将小针任意投掷在白纸上. 这样反复地投多次，数数针与任意平行线相交的次数，于是就可以得到 π 的近似值.

(3) 1904 年，R・查特发现，两个随意写出的数中，互素的概率为 $\frac{6}{\pi^2}$.

(4) 1995 年 4 月英国《自然》杂志介绍了英国罗伯特・马修斯利用夜空中亮星的分布来计算圆周率的算法：从 100 颗最亮的星星中随意选取一对又一对进行分析，计算它们位置之间的角距. 他检查了 100 万对星星，据此求得 π 的值约为 3.127 72，这个值与真值相对误差不超过 5%.

第二章 统计

I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

本章主要介绍最基本的获取样本数据的方法，以及几种从样本数据中提取信息的统计方法，其中包括用样本估计总体分布、数字特征和线性回归等内容.

从义务教育阶段来看，统计知识的教学从小学到初中分为三个阶段，在每个阶段都要学习收集、整理、描述和分析数据等处理数据的基本方法，教学要求随着学段的升高逐渐提高. 在义务教育阶段的统计与概率知识的基础上，本章通过实际问题，进一步介绍随机抽样、样本估计总体、线性回归的基本方法.

2. 学习目标

1. 随机抽样

(1) 能从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题.

(2) 结合具体的实际问题情境，理解随机抽样的必要性和重要性.

(3) 在参与解决统计问题的过程中，学会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本；通过对实例的分析，了解分层抽样和系统抽样方法.

(4) 通过试验、查阅资料、设计调查问卷等方法收集数据.

2. 用样本估计总体

(1) 通过实例体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，学会列频率分布表、画频率分布直方图、频率折线图、茎叶图，体会它们各自的特点.

(2) 通过实例理解样本数据标准差的意义和作用，学会计算数据标准差.

(3) 能根据实际问题的需求合理地选取样本，从样本数据中提取基本的数字特征（如平均数、标准差)，并作出合理的解释.

(4) 在解决统计问题的过程中，进一步体会用样本估计总体的思想，会用样本的频率分布估计总体分布，用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征；初步体会样本频率分布和数字特征的随机性.

(5) 会用随机抽样的基本方法和样本估计总体的思想，解决一些简单的实际问题；能通过对数据

的分析为合理的决策提供一些依据，认识统计的作用，体会统计思维与确定性思维的差异.

（6）形成对数据处理过程进行初步评价的意识.

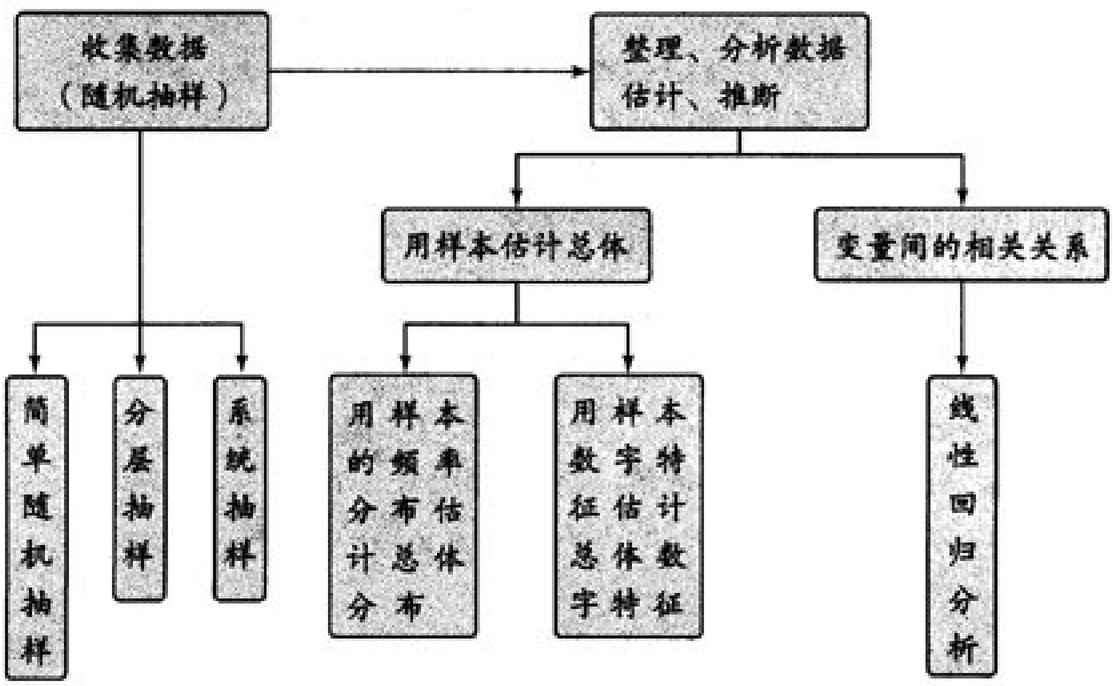
3. 变量的相关性

（1）通过收集现实问题中两个有关联变量的数据作出散点图，并利用散点图直观认识变量间的相关关系.

（2）经历用不同估算方法描述两个变量线性相关的过程. 知道最小二乘法的思想，能根据给出的线性回归方程的系数公式建立线性回归方程.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章内容安排的总体思路是：通过实际问题情境，引导学生学习随机抽样、用样本估计总体、线性回归的基本方法，使他们了解用样本估计总体及其特征的思想，体会统计思维与确定性思维的差异；通过实习作业，让学生较为系统地经历数据收集与处理的全过程，进一步体会统计思维与确定性思维的差异.

内容安排的主线是从数据收集到数据分析整理. 教科书首先通过实例引出抽样的必要性，抽样时所应考虑的问题，样本的质量（代表性）和所推断的结论之间的关系；然后介绍了几种常用的随机抽样方法：简单随机抽样、系统抽样和分层抽样. 抽样的目的是为了获得总体分布信息，教科书接下来介绍了几种获得总体分布信息的方法，其中包括：用样本频率分布估计总体分布、用样本数字特征估计总体数字特征的思想及其在解决实际问题中的应用，变量的相关关系和线性回归分析.

三、课时分配

全章共安排了 3 个小节，教学约需 16 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

2.1 随机抽样	约5课时
2.2 用样本估计总体	约5课时
2.3 变量间的相关关系	约4课时
实习作业	约1课时
小结	约1课时

II 教科书分析

本章的章头图和引言指出了本章将要学习的知识，以及这些知识的应用意义，使学生从总体上了解全章的内容.

在教学过程中，可以以水资源短缺问题为背景，引导学生思考如何通过调整水价来达到节约用水的目的，同时又不会对大多数公民的日常用水需要造成太大影响. 从这个角度可以使学生了解必须要调查目前公民的用水状况，才能定出合理的用水价格. 进一步，如何调查目前公民的用水状况？这涉及到本章将要学习的抽样、用样本估计总体等一系列的知识.

通过样本估计总体的另一个例子是土地沙漠化问题. 要了解土地沙漠化的扩展速度，通过样本来估计是其中的方法之一（当然也可以通过卫星图像来估计）.

在本章引言中，还提到一些其他的例子，通过这些问题，可以引导学生思考，体会用样本估计总体的必要性，激发学生对本章的学习兴趣. 教学中，教师还可以再举一些例子.

现代社会是信息化的社会，人们面临形形色色的问题，把问题用数量化的形式表示，是利用数学工具解决问题的基础. 对于数量化表示的问题，需要收集数据、分析数据、解答问题. 统计学是研究如何合理收集、整理、分析数据的学科，它可以为人们制定决策提供依据.

2.1 随机抽样

一、本节知识结构

总体与样本

- 方便样本
- 随机样本
  - 简单随机抽样
  - 系统抽样
  - 分层抽样

二、教学重点与难点

重点：

1. 能从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题.
2. 理解随机抽样的必要性和重要性.
3. 学会简单随机抽样方法，了解分层和系统抽样方法.
4. 对随机性样本的随机性的正确理解.

难点：对样本随机性的理解.

三、编写意图与教学建议

在本节的引言中，首先提出一些问题，其解答需要收集相关的数据. 教科书的用意是想让学生体会在现实生活中，存在着大量的问题需要通过获取数据来解答. 为解答这样的问题，我们必须清楚问题所涉及的总体和变量是什么，从而可以从统计学的观点看待问题，把实际问题转化为统计问题.

在教学中，应该使学生知道在统计问题中，应该包括以下两个方面的信息：

1. 问题所涉及的总体；
2. 问题所涉及的变量.

例如，“2004 年全区中考学生数学平均成绩和语文平均成绩各是多少?”就是一个统计问题. 在这个问题中，总体是 2004 年全区参加中考的学生全体，所涉及的变量是数学成绩和语文成绩.

在教学过程中，教师可以引导学生把节引言中的问题转化为统计问题，还可以根据实际情况列举一些学生熟悉的类似问题，再引导学生把它们转化为统计问题.

那么，为什么要进行抽样呢? 教科书通过实例，引导学生思考通过样本研究总体的必要性和重要性，以及样本的代表性与得到正确结论之间的关系. 这里用了一个形象的比喻：“通过一勺汤的味道来判断一锅汤的味道”，表明样本代表性的重要. 教师稍加引导，就可使学生体会到这里“搅拌均匀”的本质是使总体中的每个个体入选样本的可能性相等，这样就自然地引出随机抽样的出发点：使每个个体都有相同的机会被抽中.

在本节引言的教学过程中，重点是让学生体会样本的代表性与统计推断结论的可靠性之间的关系：可靠的统计推断结论需要有代表性好的样本数据作为基础. 因此，在抽取样本的过程中，考虑的最主要原则为：保证样本能够很好地代表总体.

在引言的边空中提出问题“为什么说一个好的抽样调查胜过一次蹩脚的普查”，其用意是想要学生体会抽样的必要性. 以一批袋装牛奶质量检查为例，如果采用普查的方法，就需要打开每一袋牛奶进行检验，结果会出现以下问题：

1. 我们关心牛奶的质量，想要判断这批牛奶是否可以销售. 而普查使得这批袋装牛奶都被开封，不能再销售了.

2. 普查要检验每一袋牛奶，耗费时间、人力和财力.

3. 由于普查的工作量大，操作过程中发生失误的可能性就大大增加，因此也不一定能保证结论的准确性.

如果能够通过样本中的袋装牛奶质量判断整批牛奶的质量，这样就能省时、省力，圆满完成质量检测任务.

在各种随机抽样中，简单随机抽样是最基本的抽样方法. 在其他的各种随机抽样方法中，一般会

以某种形式引用它．对于简单随机抽样，我们详细介绍了抽签法和随机数表法，这两种方法都不需要太多的设备就可以实现．也可以利用计算机或计算器来实现抽取简单样本的随机数法，其特点是效率高，可以节省时间、人力和物力．在实际中，常借助于计算机产生随机数．需要注意，抽签法可以产生真正的简单随机样本；而查表法和计算机产生随机数法（详见第三章《概率》3.2.2 和 3.3.2），产生的只是近似程度很高的简单随机样本．

在教学过程中，可以鼓励学生从自己的生活中提出类似的统计问题，如每天完成家庭作业所需要的时间，每天的体育锻炼时间，一批绳索的抗拉强度是否达到要求，一批电灯泡的寿命是否符合要求，等等．在学生提出这些问题后，要引导学生考虑问题中的总体是什么，要观察的变量是什么，如何获取样本．通过这样一个教学过程，培养学生从现实生活或其他学科中提出具有一定价值的统计问题的能力．在这个过程中提升学生对统计抽样概念的理解，初步培养学生运用统计思想表述、思考和解决现实世界中的问题的能力．

2.1.1 简单随机抽样

1. 简单随机抽样的概念．

教科书是以探究一批小包装饼干的卫生是否达标为问题导向，逐步引入简单随机抽样概念的．在45页“探究”中，提出“显然，你只能从中抽取一定数量的饼干作为检验的样本（为什么?）”，其目的是想让学生进一步体会抽样的必要性，在这里如果做普查，虽然能够得到这批小包装饼干的卫生达标情况，但普查后这批饼干就不能出售了．

有两种不同的简单随机样本定义．在一般的数理统计教科书中，把有放回抽取的样本作为简单随机样本；而在抽样的专著中，则把无放回抽取的样本作为简单随机样本．在前一个定义中，样本中的所有个体之间相互独立，这使得理论研究更为方便；而后一个定义中，样本中的所有个体之间不再具有独立性，但是样本具有更好的代表性（同一个个体不会被抽取两次以上）．当总体中的个体的数目很大时，两种方法得到的样本的统计特性相差无几，此时可以认为无放回抽取得到的所有个体之间具有独立同分布性．为使样本有更好的代表性，教科书采用了后一种简单随机样本的定义方式．

本节通过检查食品卫生是否达标的探究，引出简单随机样本与简单随机抽样的概念．在该问题的探究过程中，应该注意引导学生体会以下几点：

（1）引导学生体会采用普查（即对店中所有的小包装饼干进行检验）的方法来回答食品卫生是否达标是不合适的．因为这里检查的目的是决定能否让这批小包装饼干出售，而普查的结果却使得这批饼干完全不能出售，与检查的目的相违背．

一般地，如果检验对于个体具有破坏性，则需要通过抽样来推断总体的特性．有很多检验具有破坏性，如对产品的寿命、合格率等问题的检查．通过上面的这些讨论，使学生从一个方面体会到通过样本估计总体的必要性．

（2）抽样时不能只图方便．如果只从一些容易取到的个体（小包装饼干）中抽取样本，那么所得到的样本就只是一个“方便样本”．在出厂时，这种小包装饼干分装于大包装箱内，每个大包装箱内可放很多层小包装饼干．由于种种因素（如厂方有意将高质量产品放在顶层，或产品在运输存储过程中遭遇雨淋等），使得装在顶层的小包装饼干的质量通常与其他饼干的质量不同，造成顶层小包装饼干的代表性差．因此打开大包装箱后，随手从顶层取出一些小包装饼干所产生的方便样本的代表性差，基于这种方便样本得出的结论就会与事实相左．

教学中，要注意启发学生发现日常生活中的类似问题．例如，判断一车或一箱水果的质量，判断一袋米中的含沙量等，如果使用了“方便样本”，那么得出与事实不符的结论的可能性就会大大增加．通过上面的这些讨论，使学生体会到为什么要讨论样本的抽取方法．

(3) 在简单随机抽样的定义中，“总体内的各个个体被抽到的机会都相等”是“总体中的所有个体搅拌均匀”的统计描述.

(4) 随机抽样所得样本具有随机性（详见第三章《概率》）：在同一个总体中不同的随机抽样所得样本可以是不同的. 可以通过提问“再一次搅拌所有小包装饼干，然后不放回地取出所得到的样本是否和前一次得到的样本相同?”引导学生体会样本的这种随机性.

(5) 统计结果的错误来源：

① 样本的代表性差：由抽样方法引起，或者由样本的随机性引起.

② 错误数据：抽取样本数据过程中，由于测量、数据抄录等错误得到错误的数据.

在个体很大的情况（如个体为汽车、导弹等）下，直接把总体中的所有个体搅拌均匀并不是一件容易的事. 为克服这个困难，我们通过编号的方式把各个不同的个体用不同的自然数表示，使得抽样问题转化为从自然数的子集中抽取一些数的抽样问题.

2. 抽签法.

在介绍抽签法时，可以把抽样过程细化为如下三步：

第一步，将总体的所有 N 个个体从 0 到 $(N-1)$ 编号；

第二步，准备 N 个号签分别标上这些编号，将号签放在容器中搅拌均匀后，每次抽取一个号签，不放回地连续取 n 次；

第三步，将取出的 n 个号签上的号码所对应的 n 个个体作为样本.

教师在引导学生讨论思考栏目“你认为抽签法有什么优点和缺点? 当总体中的个体数目很多时，用抽签法方便吗?”时，应当归纳出如下几点：

优点：抽签法能够保证每个个体入选样本的机会都相等（得到的样本是简单随机样本）.

缺点：(1) 当总体中的个体数较多时，制作号签的成本将会增加，使得抽签法成本高（费时、费力）.

(2) 号签很多时，把它们“搅拌均匀”就比较困难，结果很难保证每个个体入选样本的可能性相等，从而使产生坏样本（即代表性差的样本）的可能性增加.

或许学生会问，“为什么能够保证每个个体入选样本的机会都相等?”我们可以让学生通过抽签试验来验证，即通过特定数的入选频率来体会这个结论. 例如，考查各个号签入选样本的频率，具体操作步骤如下：

① 准备 N 个号签并放入容器中；

② 将容器中的号签搅拌均匀后，不放回取出 n 个签；

③ 记录下取出的 n 个签上的号码；

④ 重复步骤 2 和步骤 3M 次，统计取到 i 号签的次数 m_i；

⑤ 计算 i 号签的入选频率 $f_M(i)=\dfrac{m_i}{M}$.

随着 M 的增加，i 号签的入选频率 $f_M(i)$ 会接近于入选概率 $\dfrac{1}{N}$.

3. 随机数法.

为克服把大量的号签搅拌均匀的困难，也为了节约制作号签和搅拌号签的成本、节省时间，需要寻找代替抽签的方法. 在用抽签法产生简单随机样本的过程中，第二步的本质是等概率地在容器中抽取号签，这个步骤完全等价于生成整数值随机数. 这样的抽签法可一般化为：

(1) 将总体的所有 N 个个体从 0～$(N-1)$ 编号；

（2）在 $0\sim(N-1)$ 的自然数中产生 n 个不同的随机数作为选出的号码；

（3）将取出的 n 个签上的号码所对应的个体作为样本.

现在的问题转化为如何生成随机数，不同的生成随机数的方法对应于不同的抽取简单随机样本方法. 事实上抽签是一种产生整数值随机数的方法，它所对应的就是前面介绍的抽签法.

还可以通过查随机数表来产生整数值随机数，与之对应的抽样方法就是随机数表法；也可以利用计算机软件（或计算器）产生整数值随机数，与之对应的就是利用计算机（或计算器）抽取简单随机样本法.

在介绍利用随机数表法产生随机数时，可让学生思考如下问题：如何实现"在随机数表中任选一个数". 实现的方法多种多样，如：

（1）利用两次抽签得到两个分别表示行号和列号的签，由这个行号和列号可以确定随机数表中的一个位置，该位置上的数作为选取的数.

（2）还可以翻到随机数表的某一页，闭上眼睛把笔尖放到随机数表上，以笔尖点到的数作为选用的随机数表的相对页数（如果数字大于随机数表的总页数，可以用该数字除以总页数的余数作为相对页数）. 将随机数表翻到选定的页数，再次闭上眼睛用笔尖点出一数作为选取的数.

关于使用简单随机抽样读取随机数的其他方法可参考《中华人民共和国国家标准》（或冯世雍，施锡铨，《抽样调查——理论、方法与实践》，上海科学技术出版社，第 50～53 页）. 也可以通过掷随机数骰子（正 20 面体）来产生整数值随机数（冯世雍，施锡铨，《抽样调查——理论、方法与实践》，上海科学技术出版社，第 50 页）.

教科书以抽查袋装牛奶为例介绍随机数表抽样方法. 这里以边空的形式提出问题"生产实践中，往往是从一大批袋装牛奶中抽样. 也就是说总体中的个体数是很大的. 你能从这个例子出发说明一下抽样的必要性吗？"这个问题的用意是让学生从节省人力、物力、财力和时间的角度来考虑抽样的必要性.

教科书在介绍使用随机数表方法时，以边空的形式提出一个问题"当 $N=100$ 时，分别以 0，3，6 为起始点对总体编号. 再利用随机数表抽取 10 个号码. 你能说出从 0 开始编号的好处吗？"该问题能够使学生认识到给总体中的所有个体编号可以从任何整数开始，但为了操作简单，可以选择从 0 开始编号. 在这个问题中，个体总数为 100，从 0 开始编号，那么用两位数字即可，因此可以节省从随机数表中查取随机数的时间.

为了使学生获得简单随机抽样的经验，教学中要注意增加学生实践的机会. 例如，用抽签法决定班里参加某项活动的代表人选，用随机数法从全年级同学中抽取样本计算平均身高，等等.

4. 阅读与思考栏目"一个著名的案例"的教学建议.

教科书以 1936 年美国总统选举前的一个失败的民意调查的例子，让学生感受样本代表性的重要. 为了引导学生独立思考，在介绍了案例的详细背景之后，给出了思考题"你认为预测结果出错的原因是什么？"

预测结果出错的原因是：用于统计推断的样本来自少数富人，只能代表富人的观点，不能代表全体选民的观点. 在教学过程中，可以引导学生讨论下列问题：

（1）这里抽取样本的方法是不是简单随机抽样？

（2）这里的样本是不是方便样本？

（3）这样的样本代表哪些个体？

通过这样一些问题的讨论，使学生找出预测结果出错的原因，进一步体会随机抽样的重要性.

在简单随机抽样的教学过程中，可以利用练习 2 组织学生用抽签法、随机数表法抽取样本，有条

件的学校也可以利用 Excel 软件进行简单抽样，使学生体会简单随机抽样的全过程，比较不同的抽样方法所耗费的时间和成本.

2.1.2 系统抽样

教科书通过探究“学生对教师教学的意见”过程，介绍了一种最简单的系统抽样——等距抽样，并给出实施等距抽样的一般步骤.

边空中提出了这样一个问题：“请将这种抽样方法与简单随机抽样做一个比较，你认为这种抽样方法能提高样本的代表性吗？为什么？”其用意是引导学生比较简单随机抽样和等距抽样之间的下列差别.

1. 系统抽样比简单抽样更容易实施，可节约抽样成本.

2. 系统抽样所得样本的代表性和具体的编号有关；而简单随机抽样所得样本的代表性与个体的编号无关. 如果编号的个体特征随编号的变化呈现一定的周期性，可能会使系统抽样的代表性很差. 例如，如果学号按照男生单号女生双号的方法编排，那么，用系统抽样的方法抽取的样本就会是全部为男生或全部为女生.

3. 系统抽样比简单随机抽样的应用范围更广.

在教学过程中，可以使用如下的例子说明上述几点差别：

1. 将全班学生按男女生交替排成一路纵队，用掷骰子的方法在前六名学生中任选一名，用 l 表示该名学生在队列中的序号. 将队列中序号为 $(l+6k)(k=1, 2, 3, \cdots)$ 的学生抽出作为样本，这是一种系统抽样方法. 但是由于排队的特点，使得抽出的样本或者都是男生，或者都是女生，因此代表性比较差. 这里，将学生排成一路纵队相当于把所有个体编号，而这里编号的特点是奇数位的个体和偶数位的个体的体重指标分布有着明显不同（即男生体重和女生体重分布有明显不同）. 此时从性别来看个体的编号，相当于有一个周期为 2 的排列，因此用最简单的系统抽样——等距抽样所产生的样本只能代表某一性别的个体，不能很好地代表总体，是一个“坏”样本.

2. 将全班学生按体重大小次序排成一路纵队，用掷骰子的方法在前六名学生中任选一名，用 l 表示该名学生在队列中的序号. 将队列中序号为 $(l+6k)(k=1, 2, 3, \cdots)$ 的学生抽出作为样本，这是一种系统抽样方法. 此时所得样本有很好的代表性.

3. 对工业生产线上的产品施行质量控制，需要实时（随时）监控生产线的工作状态是否正常. 在这种情况下，在抽样的过程中，并不知道总体所包含的个体总数，因此不能用简单抽样方法. 虽然等生产完一批产品之后，就可利用简单随机抽样方法获取样本，但这对于实时监控生产线的工作状态没有任何帮助. 如果按产品生产的先后次序作为产品的编号，并事先规定好分段时间间隔 k，则可以利用系统抽样方法进行抽样.

在上面的第 1 点中，只需投掷一次骰子，就可以按照等距的原则取出所有的样本；而用抽签法，则需要制作与学生数目相同的号签，放在容器中搅拌均匀后，还要不放回地摸出所需样本对应的号签，操作过程更为复杂. 第 1、2 两点还说明，系统抽样的效果将会受个体的编号影响，而简单随机抽样的效果不受个体编号的影响. 虽然一个好的个体编号方案能够使得系统抽样方法所获取的样本的代表性更好，但在实际应用中这种好编号方案却很困难确定，需要有关总体的一些信息（如在第 2 点中需要知道全班学生的体重次序）. 第 3 点说明了系统抽样的应用范围比简单随机抽样的应用范围广.

为检验个体的编号是否具有周期性，可以采用如下的方法：在调查允许的条件下，从不同的编号开始等距抽样，得到几次不同的样本. 对比几次样本的特点，如果有明显差别，说明总体的编号存在某种周期性规律，且周期和抽样距离重合.

阅读与思考栏目“广告中数据的可靠性”的教学建议

为产品作广告是厂家推销自己产品的一种方式，广告中的统计结果来自于特定总体中抽取的样本．通过本栏目，可以培养学生把统计知识应用到现实生活中的能力，使学生意识到产品广告中的统计结果的适用范围与抽取的样本有关：如果是经过精心挑选的有利于说明产品有效性的样本，就是那些对产品有效的个体，统计结果不能说明问题，具有误导性；如果是方便样本，就是那些便于接触的个体，统计结果就可能没有普适性；如果样本是从人群中用随机抽样方法抽取，其统计结果就有很好的可信度．

虚假广告正是通过淡化总体和抽样方法、强化统计结果来夸大产品的有效性的，因而能够产生误导消费者的作用．

思考题“请你从各种媒体中收集一些广告，并用统计的知识分析一下它们所提供的数据和结论的真实性”，是想让学生从样本代表性的角度分析广告中的数据和结论的适用范围，是否科学可靠，有无误导作用．

2.1.3 分层抽样

教科书从“了解本地区中小学生的近视情况及其形成原因”的探究中引入分层抽样的概念．在探究的过程中，应该引导学生体会：调查者是利用事先掌握的各种信息对总体进行分层，这可以保证每一层一定有个体被抽到，从而使得样本具有更好的代表性．为达到此目的，教科书利用边空问题“你认为哪些因素可能影响学生的视力？设计抽样方法时需要考虑这些因素吗？”来引导学生思考，在教学的过程中要充分注意这一点．

教科书在探究高中、初中和小学的抽样个数时，在边空提出问题“想一想，为什么要这样取各个学段的个体数？”用意是向学生强调：含有个体多的层，在样本中的代表也应该多，即样本从该层中取的个体数也应该多．这样的样本才有更好的代表性．

分层抽样的实施步骤如下：

1．根据已经掌握的信息，将总体分成互不相交的层；

2．根据总体中的个体数 N 和样本容量 n 计算抽样比 $k=\dfrac{n}{N}$；

3．确定第 i 层应该抽取的个体数目 $n_i \approx N_i \times k$（N_i 为第 i 层所包含的个体数），使得各 n_i 之和为 n；

4．在各个层中，按步骤 3 中确定的数目在各层中随机抽取个体，合在一起得到容量为 n 的样本．

在步骤 1 中，通常是根据总体的特征指标的差异来分层，如在前面的探究问题中，高中、初中和小学生的近视情况应该存在明显差异，所以把总体分为相应的 3 层能够保证所取到的样本同时包含高中生个体，初中生个体和小学生个体，即样本有更好的代表性．如果用简单抽样，则样本可能仅包含高中生，或仅包含初中生，或仅包含小学生，在这种情况下样本的代表性就很差了．

另外，在实际应用中，常按地理区域或行政管理单位来分层．这样可以使得抽样过程的组织管理及数据汇总都比较方便，还可以得到各个层的分析结果．例如在中小学生近视情况调查中，利用分层抽样，不仅可以从样本中了解中小学生近视的总体情况，还可以分别得到小学生、初中生和高中生三个群体的近视情况，进而可进一步分析这 3 个群体近视情况的差异大小．

教科书在第 51 页设置了一个探究栏目，引导学生总结本节的内容．下面分别给出探究栏目中两个问题的参考答案：

（1）简单随机抽样：简单随机抽样是最基本的抽样方法，其他的各种随机抽样方法中，大都会以某种形式引用它．

系统抽样：① 系统抽样比其他随机抽样方法更容易施行，可节约抽样成本.

② 系统抽样所得样本的代表性和具体的编号有关（简单随机抽样所得样本的代表性与个体的编号无关）. 如果编号的个体特征随编号变化呈现一定的周期性，可能会使系统抽样的代表性很差.

③ 系统抽样比简单随机抽样的应用范围更广. 它可以应用到个体有自然编号，但是总体中个体的数目却在抽样时无法确定的情况（如生产线的产品的质量检验）.

分层抽样：充分利用了已知的总体信息，得到的样本比前两种方法有更好的代表性，并且可得到各层的子样本以估计各层的信息.

（2）在这个问题中，总体是该地区的所有中小学在校生人数，并且已经知道人数的分布情况，因此可以利用分层抽样方法抽取样本. 现在要把总体分为 9 个层，分别是：城市小学、城市中学、城市高中、县镇小学、县镇初中、县镇高中、农村小学、农村初中和农村高中. 在各层中要抽取的个体数目等于本层中的个体数目除以 1 000 后按四舍五入取整，这样在各层中抽取的个体数目如下表所示：

学段	城市	县镇	农村
小学	357	222	258
初中	226	134	113
高中	112	43	6

按上表数目在各个层中用简单随机抽样方法抽取个体，合在一起形成所需样本.

阅读与思考栏目“如何得到敏感性问题的诚实反应”的教学建议

当被调查对象是人的时候，社会道德观念的约束、人对事物的判断能力、人的虚荣心等，会出现很多需要特别考虑的问题，其中之一就是如何得到敏感性问题的诚实反应. 通过这个阅读材料，要使学生初步体会以下几点：

1. 即使知道填写调查问卷者，也无法知道填卷者本人是否吸烟.
2. 从答案中估计吸烟人数百分比的方法.

还可以引导学生利用频率的稳定性讨论用这种方法估计结果的精度和样本容量之间的关系，袋子里可不可以只放两个大小、形状与质量完全一样的一个白球和一个红球？

本栏目中的思考说明了设计调查问卷所要注意的一些问题，然后让学生自己设计一个调查问卷，引导学生学习获取敏感性数据的方法. 在教学过程中，可以鼓励学生用所设计的调查问卷进行收集数据的实践，并从中推断结论.

四、教学设计案例

2.1 随机抽样（第 1 课时）

1. 教学任务分析

（1）由章头图和章引言，通过实例分析让学生了解学习本章的意义，引发学生的求知欲.

（2）通过实例使学生能够从实际问题中提出统计问题.

（3）通过实例分析和阅读与思考（一个著名的案例）使学生理解随机抽样的必要性.

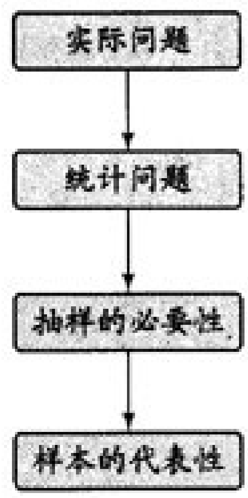
（4）使学生理解样本的代表性与统计推断结论可靠性之间的关系.

2. 教学重点与难点

重点：使学生初步学会从实际问题中提出统计问题，理解抽样的必要性和重要性，以及样本代表性的概率描述.

难点：对什么才是“有一定价值的统计问题”的理解，对样本代表性的概率描述的理解.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动	备　注
(1) 阅读章引言，你认为本章要学习的主要内容是什么？	使学生对本章要学习的内容有一个初步的了解，激发学习兴趣.	师：介绍章头图，布置阅读章引言内容. 生：阅读章引言. 师：提出问题“你认为本章要学习的主要内容是什么”. 生：讨论回答问题.	
(2) 如何刻画一批袋装牛奶的质量是否合格？	引导学生从统计的角度看问题.	师：如何刻画一批袋装牛奶的质量是否合格？ 生：思考后回答问题. 师：总结，下面的变量都可以作为衡量产品质量的指标： 1. 袋装牛奶的细菌含量； 2. 袋装牛奶的重量； 3. 袋装牛奶的蛋白质含量； 4. 袋装牛奶的脂肪含量； 5. 袋装牛奶的钙含量； ……	为引导学生提出具有实际意义的统计问题作准备.
(3) 在问题“一批袋装牛奶的细菌含量是否超标？”中，个体是什么？总体是什么？	引导学生发现统计问题的特点之一是明确问题中的总体.	师：在问题“一批袋装牛奶的细菌含量是否超标？”中蕴涵的总体是什么？ 生：思考回答：个体是一袋袋装牛奶，总体是这批袋装牛奶.	

续表

问　题	问题设计意图	师生活动	备　注
（4）"一批袋装牛奶的细菌含量是否超标？"这一问题是通过什么变量来表达的？	引导学生发现统计问题的特点之二是明确问题中所涉及的变量的含义.	师："一批袋装牛奶的细菌含量是否超标？"这一问题是通过什么变量来表达的？ 生：构成问题的变量是：袋装牛奶的细菌含量. 师：类似于"一批袋装牛奶的细菌含量是否超标？"这样的问题称为统计问题.	
（5）你认为统计问题具有什么特点？	使学生明确一个统计问题应该蕴涵着所研究的总体和所要研究的变量.	师：为检验一批袋装牛奶是否合格，我们从细菌含量的角度提出了统计问题"一批袋装牛奶的细菌含量是否超标？"你认为统计问题具有什么特点？ 生：思考，回答. 师：引导学生得到答案： 1. 有明确的总体，如前面问题中这批袋装牛奶为总体. 2. 问题由所要研究的变量构成，如前面问题中所要研究的变量是袋装牛奶的细菌含量.	
（6）在检验一批袋装牛奶是否合格的问题中，你能够用其他的变量提出统计问题吗？	培养学生提统计问题的能力.	师：在检验一批袋装牛奶是否合格的问题中，你能够用其他的变量提出统计问题吗？ 生：思考回答： 1. 袋装牛奶的重量是否达标？ 2. 袋装牛奶的蛋白质含量是否达标？ 3. 袋装牛奶的脂肪含量是否达标？ 4. 袋装牛奶的钙含量是否达标？ 5. 袋装牛奶的重量、蛋白质的含量、脂肪的含量以及钙含量是否都达标？ ……	
（7）通过普查和抽样调查来了解"一批袋装牛奶的细菌含量"各有什么优缺点？应该采用哪种方法？	使学生了解通过样本估计总体的必要性.	师：通过普查和抽样调查来了解"一批袋装牛奶的细菌含量"各有什么优缺点？ 生：思考，讨论. 师：引导得到答案. 普查方法的优点：在普查的过程中不出错的情况下可以得到这批袋装牛奶的真实细菌含量. 弊病： 1. 需要打开每一袋奶进行检验，结果使得这批奶不能够出售，失去了调查这批袋装牛奶的质量的意义. 2. 普查需要大量的人力、物力和财力. 3. 当普查的过程中出现很多数据测量、录入等错误时，也会产生错误的结论. 抽样调查的优点： 容易操作，节省人力、物力和财力. 缺点：估计结果有误差. 所以，一般采用抽样调查的方法来了解产品质量指标.	

续表

问　题	问题设计意图	师生活动	备　注
（8）为什么说一个好的抽样调查胜过一次蹩脚的普查?	使学生体会抽样的必要性和重要性.	师：为什么说一个好的抽样调查胜过一次蹩脚的普查?(提示可以用前面的例子来说明). 生：思考，讨论.	
（9）你能举出其他用样本估计总体的例子吗?	锻炼学生从统计学角度提问题的能力，使学生了解用样本估计总体的必要性.	师：你还能举出其他的需要用样本估计总体的例子吗? 生：思考回答. 师：可以举第一节第一段提到的一些例子.	
（10）要想对整批袋装牛奶的细菌含量做出正确判断，对样本的要求是什么?	使学生认识到样本代表性对结论的影响.	师：按教科书节引言第一段内容列举一些需要通过收集样本作出回答的问题，结合“检测某批袋装牛奶的细菌含量”问题提问：要想对整批袋装牛奶的细菌含量做出正确判断，对样本的要求是什么? 生：思考，回答问题. 师：引导得到答案：样本数据应该能很好地代表总体数据，即样本应该具有好的代表性.	
（11）如何通过一小勺汤来正确判断一锅汤的味道?	使学生加深对样本代表性的理解.	师：交代“做一锅汤，放完所有的调料后，要品尝汤的味道”的背景，提出问题：如何通过一小勺汤来正确判断一锅汤的味道? 生：思考，得到答案：先将锅中的汤搅拌均匀，然后取一小勺来品尝. 师：汤中的所有原料相当于总体，这里关心的是“平均味道”（这里味道相当于变量，统计问题关心的是变量的平均数），每个个体具有特定原料的味道（相当于个体变量值），小勺中的原料相当于取出的样本. 搅拌均匀的目的就是要保证样本中具有各种味道的原料之比与总体中的这种比基本相同.	如有条件，可以制作一些画面来讲解.
（12）如何用概率的语言来刻画“保证样本中具有各种味道的原料之比与总体中的这种比基本相同”这一说法?	提高学生抽象表达能力.	师：提出问题：如何用概率的语言来刻画“保证样本中具有各种味道的原料之比与总体中的这种比基本相同”这一说法? 生：思考. 师：引导得到答案：使得总体中的每一个个体都以相同的可能性被选到样本之中. 师：归纳总结出章引言的最后一段.	
（13）你认为预测结果出错的原因是什么?	进一步了解样本代表性的重要.	师：介绍阅读与思考栏目“一个著名的案例”，提出问题：你认为预测结果出错的原因是什么? 生：回答. 师：引导给出答案及此案例说明的问题.	

续表

问　题	问题设计意图	师生活动	备　注
（14）小结（作业）： 1. 如何提出统计问题？ 2. 抽样调查与普查各有什么优缺点？ 3. 样本的代表性与统计推断结论之间的关系是什么？ 4. 如何用概率语言描述有代表性的样本？			可以作为课堂或课后作业.

五、习题解答

练习（第 47 页）

1. 抽样调查和普查的比较见下表：

抽样调查	普查
节省人力、物力和财力	需要大量的人力、物力和财力
可以用于带有破坏性的检查	不能用于带有破坏性的检查
结果与实际情况之间有误差	在操作正确的情况下，能得到准确结果

抽样调查的好处是可以节省人力、物力和财力，可能出现的问题是推断的结果与实际情况之间有误差. 如抽取的部分个体不能很好地代表总体，那么我们分析出的结果就会有偏差.

2. (1) 抽签法：对高一年级全体学生 450 人进行编号，将学生的名字和对应的编号分别写在卡片上，并把 450 张卡片放入一个容器中，搅拌均匀后，每次不放回地从中抽取一张卡片，连续抽取 50 次，就得到参加这项活动的 50 名学生的编号.

(2) 随机数表法：

第一步：先将 450 名学生编号，可以编为 000，001，…，449.

第二步：在随机数表中任选一个数. 例如选出第 7 行第 5 列的数 1（为了便于说明，下面摘取了附表的第 6～10 行）.

16 22 77 94 39 49 54 43 54 82　17 37 93 23 78 87 35 20 96 43　84 26 34 91 64

84 42 $\boxed{1}$7 53 31 57 24 55 06 88　77 04 74 47 67 21 76 33 50 25　83 92 12 06 76

63 01 63 78 59 16 95 55 67 19　98 10 50 71 75 12 86 73 58 07　44 39 52 38 79

33 21 12 34 29 78 64 56 07 82　52 42 07 44 38 15 51 00 13 42　99 66 02 79 54

57 60 86 32 44 09 47 27 96 54　49 17 46 09 62 90 52 84 77 27　08 02 73 43 28

第三步：从选定的数 1 开始向右读，得到一个三位数 175，由于 175<450，说明号码 175 在总体内，将它取出；继续向右读，得到 331，由于 331<450，说明号码 331 在总体内，将它取出；继续向右读，得到 572，由于 572>450，将它去掉. 按照这种方法继续向右读，依次下去，直到样本的 50 个号码全部取出. 这样我们就得到了参加这项活动的 50 名学生.

3. 用抽签法抽取样本的例子：为检查某班同学的学习情况，可用抽签法取出容量为 5 的样本.

用随机数表法抽取样本的例子：部分学生的心理调查等.

抽签法能够保证总体中任何个体都以相同的概率被选到样本之中，因此保证了样本的代表性.

4. 与抽签法相比，随机数表法抽取样本的主要优点是节省人力、物力、财力和时间，缺点是所产生的

样本不是真正的简单样本.

练习（第 49 页）

1. 系统抽样的优点是：
   (1) 简便易行；
   (2) 当对总体结构有一定了解时，充分利用已有信息对总体中的个体进行排队后再抽样，可提高抽样效率；
   (3) 当总体中的个体存在一种自然编号（如生产线上产品的质量控制）时，便于施行系统抽样法.

   系统抽样的缺点是在不了解样本总体的情况下，所抽出的样本可能有一定的偏差.
2. (1) 对这 118 名教师进行编号；
   (2) 计算间隔 $k=\frac{118}{16}=7.375$，由于 k 不是一个整数，我们从总体中随机剔除 6 个样本，再来进行系统抽样. 例如我们随机剔除了 3，46，59，57，112，93 这 6 名教师，然后再对剩余的 112 位教师进行编号，计算间隔 $k=7$；
   (3) 在 1～7 之间随机选取一个数字，例如选 5，将 5 加上间隔 7 得到第 2 个个体编号 12，再加 7 得到第 3 个个体编号 19，依次进行下去，直到获取整个样本.
3. 由于身份证（15 位）的最后一位表示性别，后三位是 632 的观众全部是女性，所以这样获得的调查结果不能代表男性观众的意见，因此缺乏代表性.

练习（第 52 页）

1. **说明** 设置本题的目的主要是让学生熟悉三种抽样方法的实施过程，体会抽样统计结果和普查统计结果之间的差别，以及哪种方法得到的统计结果可能会更精确等.

   教师讲评此题时，可以利用全班学生的答案，引导学生体会抽样统计结果的随机性. 另外，还可以利用各个学生的不同抽样结果，从平均的角度比较不同统计结果的平均精度（即比较简单随机抽样统计结果的平均、系统抽样统计结果的平均和分层抽样统计结果的平均与全面调查统计结果之间的距离）.
2. 这种说法有道理，因为一个好的抽样方法应该能够保证随着样本容量的增加，抽样调查结果会接近于普查的结果. 因此只要根据误差的要求取相应容量的样本进行调查，就可以节省人力、物力和财力.
3. 可以用分层抽样的方法进行抽样. 将麦田按照气候、土质、田间管理水平的不同而分成不同的层，然后按照各层麦田的面积比例及样本容量确定各层抽取的面积，再在各层中抽取个体（这里的个体是单位面积的一块地）.

习 题 2.1（第 53 页）

A 组

1. 产生随机样本的困难：
   (1) 很难确定总体中所有个体的数目，例如调查对象是生产线上生产的产品.
   (2) 成本高，要产生真正的简单随机样本，需要利用类似于抽签法中的抽签试验来产生非负整值随机数.
   (3) 耗时多，产生非负整数值随机数和从总体中挑选出随机数所对应的个体都需要时间.
2. 调查的总体是所有可能看电视的人群.

   学生 A 的设计方案考虑的人群是：上网而且登录某网址的人群，那些不能上网的人群，或者不登录某网址的人群就被排除在外了. 因此 A 方案抽取的样本的代表性差.

   学生 B 的设计方案考虑的人群是小区内的居民，有一定的片面性. 因此 B 方案抽取的样本的代表

性差.

学生C的设计方案考虑的人群是那些有电话的人群，也有一定的片面性. 因此C方案抽取的样本的代表性差.

所以，这三种调查方案都有一定的片面性，不能得到比较准确的收视率.

此题说明方便样本的代表性差.

3. (1) 因为各个年级学习任务和学生年龄等因素的不同，影响各年级学生对学生活动的看法，所以按年级分层进行抽样调查，可以得到更有代表性的样本.

(2) 在抽样的过程中可能遇到的问题如敏感性问题：有些学生担心提出意见对自己不利；又如不响应问题：由于种种原因，有些学生不能发表意见；等等.

(3) 前面列举的两个问题都可能导致样本的统计推断结果的误差.

(4) 为解决敏感性问题，可以采用阅读与思考栏目“如何得到敏感性问题的诚实反应”中的方法设计调查问卷；为解决不响应问题，可以事先向全体学生宣传调查的意义，并安排专人负责发放和催收调查问卷，最大程度地回收有效调查问卷.

说明 问题(2)是一个开放性问题，没有一个标准的答案，学生能够提出2～3个问题就可以了. 但是要注意(3)和(4)的答案会随着(2)中提出的问题而变化.

4. 将每一天看作一个个体，则总体由365天组成. 假设要抽取50个样本，将一年中的各天按先后次序编号为0～364天.

用简单随机抽样设计方案：制作365个号签，依次标上0～364. 将号签放到容器内充分搅拌均匀，从容器中任意不放回取出50个号签. 以签上的号码所对应的那些天构成样本，检测样本中所有个体的空气质量.

用系统抽样设计抽样方案：先通过简单随机抽样方法从365天中随机抽出15天，再把剩下的350天重新按先后次序编号为0～349天. 制作7个分别标有0～7的号签，放在容器中充分搅拌均匀. 从容器中任意取出一个号签，设取出的号签的编号为a，则编号为$a+7k$ ($0\leqslant k<50$) 所对应的那些天构成样本，检测样本中所有个体的空气质量.

显然，系统抽样方案抽出的样本中个体在一年中排列的次序更规律，因此更好实施，更受方案的实施者欢迎.

说明 从样本的代表性来讲，这里的系统抽样的代表性应该更好，因为它取到的样本一定会包含春夏秋冬四个季节中的个体，而简单随机抽样方案则不一定如此. 另外，从样本的代表性角度来看，按季节分层抽样的效果应该更好.

5. 田径队运动员的总人数是$56+42=98$(人)，要得到28人的样本，占总体的比例为$\frac{2}{7}$. 于是，应该在男运动员中随机抽取$56\times\frac{2}{7}=16$(人)，在女运动员中随机抽取$28-16=12$(人). 这样我们就可以得到一个容量为28的样本.

6. 以10为分段间隔，首先在1～10的编号中，随机地选取一个编号，如6，那么这个获奖者奖品的编号是：6，16，26，36，46.

7. **说明** 可以按年级分层抽样的方法设计方案.

B组

1. **说明** 可以按年级分层抽样的方法设计方案，调查问卷由学生所关心的问题组成. 例如：

(1) 你最喜欢哪一门课程?

(2) 你每月的零花钱平均是多少？

(3) 你喜欢看《新闻联播》吗？

(4) 你每天早上几点起床？

(5) 你每天晚上几点睡觉？

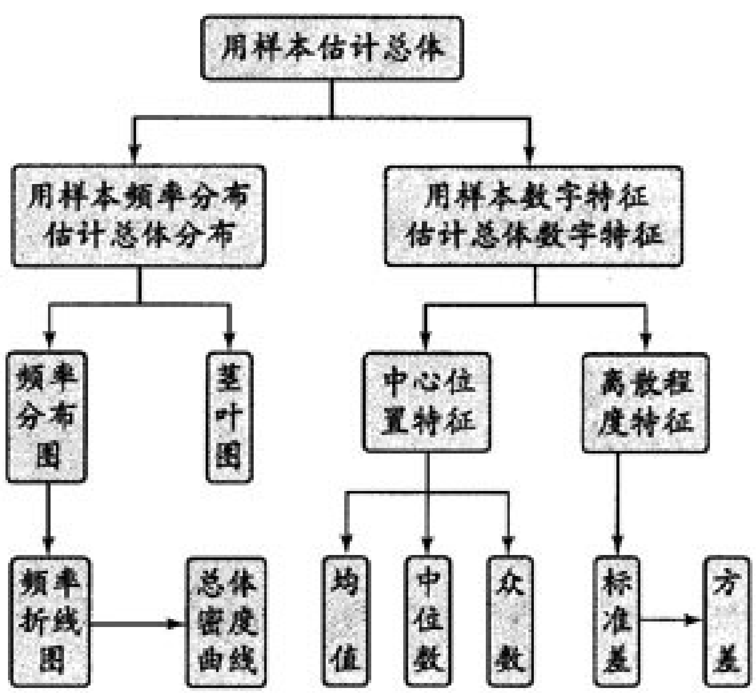
要根据统计的结果和具体的情况解释结论，主要从引起结论的可能原因及结论本身含义来解释.

2. **说明** 这是一个开放性的题目，没有一个标准的答案. 教师主要评判学生设计的抽样方案所产生的样本的代表性好坏.

这里利用分层抽样来设计抽样方案的效果应该比较好，可以按照年龄分层，也可以按职业，或者环境（城、镇、乡等）分层.

2.2 用样本估计总体

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 体会分布的意义和作用，在表示样本数据的过程中，学会列频率分布表、画频率分布直方图、频率折线图、茎叶图，体会它们各自的特点.

2. 理解样本数据标准差的意义和作用，学会计算数据标准差. 对样本数据中提取基本的数字特征（如平均数、标准差）作出合理的解释.

3. 体会用样本估计总体的思想，会用样本的频率分布估计总体分布，会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征.

4. 初步体会样本频率分布和数字特征的随机性.

5. 会用随机抽样的基本方法和样本估计总体的思想，解决一些简单的实际问题；能通过对数据的分析为合理的决策提供一些依据，认识统计的作用，体会统计思维与确定性思维的差异，形成对数据处理过程进行初步评价的意识.

难点：对总体分布概念的理解，统计思维的建立.

三、编写意图与教学建议

本节的引言说明了用统计方法解决实际问题的一般框架，明确了估计总体分布和总体数字特征的重要性.

在实际应用中，总体分布可以为合理决策提供依据（总体分布描述了总体在各个范围内个体的百分比）. 因此很多实际问题的解答就转化为求总体分布的问题，其求解途径是通过样本来估计总体分布.

在很多情况下，总体分布是由几个总体数字特征所唯一确定的，或者需要解决的统计问题是关于总体数字特征的问题. 这时就需要估计总体的数字特征，其求解途径也是通过样本来估计.

教科书通过探究栏目提出“居民生活用水定额管理问题”，引出总体分布的估计问题，以及估计总体分布的途径，而且这个问题贯穿本节始终.

通过对该问题的探究，使学生学会列频率分布表、画频率分布直方图、频率折线图. 教师可以利用初中有关随机事件的知识，引导学生进一步体会由样本确定的频率分布直方图的随机性；通过初中有关频率与概率之间的关系，了解频率分布直方图的规律性，即频率分布与总体分布之间的关系，进一步体会用样本估计总体的思想来源.

由于样本频率分布直方图可以估计总体分布直方图，因此可以用样本频率分布特征来估计相应的总体分布特征，教科书中还通过该问题展示了利用频率分布直方图估计总体分布的众数、中位数和平均数的方法. 当然，总体的中位数和平均数都可以通过相应的样本中位数和样本平均数来估计，并且这样的估计通常具有更高的精度，教师可以通过计算机模拟让学生体会这一点. 用样本频率分布特征来估计相应的总体分布特征的意义在于，当原始样本数据丢失时还可以估计总体特征.

为了便于理解茎叶图和标准差（方差）的实际含义和应用，这两个概念都是通过离散型随机变量引入的. 进一步地，对于正态分布的总体，利用总体平均数和总体标准差，可以完全确定总体分布，从而在这种情况下，可以用样本平均数和样本标准差来估计总体平均数和总体标准差，进而估计总体分布.

在教学中，应该让学生利用上一节对特定实际问题所收集的样本，模仿居民生活用水定额管理问题的解决思路，给出相应实际问题的解答. 通过此过程，初步培养学生运用统计思想表述、思考和解决现实世界中的问题的能力.

2.2.1 用样本的频率分布估计总体分布

在这一小节中主要介绍表示样本分布的方法，包括频率分布表、频率分布直方图、频率分布折线图和茎叶图，并介绍了频率折线图与总体密度之间的关系.

教科书通过探究“居民生活用水定额管理问题”，逐步引入频率分布表、频率分布直方图和频率分布折线图的直观含义和作图方法. 由于作统计图、表的操作性很强，所以教学中要使学生在明确图、表含义的前提下，让学生自己动手作图.

在居民月均用水量数据表旁边有一个边空，向学生强调“在实际抽样时，样本容量的大小应该根据问题的实际需要来确定，并不一定样本容量越大越好”. 实际上，样本容量应该根据取样的成本限制

和实际问题所要求的精度而确定，具体的确定方法可以参考抽样方法专著.

教学中，应使学生注意以下几个方面：

1. 在实际应用中，很多问题的解答需要总体分布的信息，而总体分布则需要用样本来估计. 在"居民生活用水定额管理问题"中，要解决的是制定什么样的居民生活用水定额管理方案能够使大部分的居民的日常生活不受影响？如果我们知道全体居民的用水量分布，就可以回答此问题. 因此问题转化为总体分布的估计（当然也可以用总体的数字特征来解决此问题，这时问题转化为总体特征的估计）.

2. 总体分布情况可以通过样本来估计，频率分布是总体分布的一种近似. 频率分布表和频率分布直方图有下述特性：

（1）若样本的容量为 n，确定分组数 k 应该在（$1+3.3\lg n$）附近选. 在教科书中只是给出了样本容量不超过 100 时，分组数 k 在 5～12 组之间的情形. 当样本容量 n 比较大时，可以用上面的公式确定分组数 k（茆诗松主编，《统计手册》，科学出版社）.

（2）频率分布表中的数字和频率分布直方图的形状都与分组数（组距）有关；频率分布直方图的外观还和坐标系的单位长度有关. 教科书中通过探究栏目提出此特性，意图是让学生自己动手画频率分布直方图，体会这一点. 教师也可以利用教科书提供的用水量数据作不同的频率分布表与频率分布直方图（可以利用 Excel 软件），向学生展示它们随分组数增加的变化规律. 分组数的变化可以引起频率分布表和频率分布直方图的结构变化；坐标系的单位长度的变化只能引起频率分布直方图的形状沿坐标轴方向的拉伸变化.

（3）随机性：频率分布表和频率分布直方图由样本决定，因此它们会随着样本的改变而改变. 在教学过程中可以利用计算机模拟演示，使学生体会频率分布表和频率分布直方图的这种随机性（对于固定的分组数）.

（4）规律性：根据频率趋近于概率的原理，若固定分组数，随着样本容量的增加，频率分布表中的各个频率会稳定在总体在相应分组的概率之上，从而频率分布直方图中的个个矩形的高度也会稳定在特定的值（即相应的概率除以组间距）上. 在教学过程中可以利用计算机模拟演示，使学生体会频率分布表和频率分布直方图的这种随样本容量增加的规律性（对于固定的分组数）.

（5）特别地，若按（1）中的方法确定分组数，则频率分布直方图稳定于总体密度函数. 在教学过程中可以利用计算机模拟正态分布样本，向学生展示随着样本容量的增加，频率分布直方图的变化规律，使学生体会频率折线稳定于密度曲线的规律性.

3. 在频率分布直方图中，每个小矩形的面积等于相应数据组的频率，小矩形的高等于数据组频率除以组距.

教科书中提出思考栏目"如果当地政府希望使 85%以上的居民每月的用水量不超出标准，根据频率分布表 2-2 和频率分布直方图 2.2-1，你能对制定月用水量标准提出建议吗？"是想让学生模仿教科书中的方法制定标准，以锻炼学生的动手能力.

教科书在给出用水量标准之后提了一个问题"想一想，你认为 3 t 这个标准一定能够保证 85%以上的居民用水量不超标吗？如果不一定，那么哪些环节可能会导致结论的差别？"该问题是想引导学生正确理解统计推断的结论. 这里答案应该是"不一定能够保证"，其主要原因是频率分布表和频率分布直方图存在随机性.

关于总体密度曲线，需要使学生了解：总体在区间（a，b）内取值的百分比就是教科书图 2.2-3 中阴影部分的面积. 这里教科书通过思考栏目提出两个问题，是想让学生了解到：

1. 有的总体没有密度曲线. 例如总体是掷骰子试验的所有可能出现的结果.

2. 总体密度曲线与总体分布相互唯一确定. 如果总体分布已知，就可以得到密度曲线的函数表达

式，从而用函数的理论去研究它.

3. 我们所面临的情况是总体分布未知，因此可以通过样本频率折线近似（当然还有其他方法估计总体密度曲线），但不能够通过样本数据准确地画出总体密度曲线.

像频率分布表和频率分布直方图一样，茎叶图也是用来表示样本数据分布的一种方法. 教科书通过比较甲乙两个运动员比赛得分情况引入茎叶图，这里是为了方便比较，把甲乙两个运动员比赛得分的茎叶图画在一起. 实际上，可以对任何一个样本作茎叶图，对于书上的例子，运动员甲得分茎叶图为：

茎	叶
0	8
1	3 4 6
2	3 6 8
3	3 8 9
4	
5	1

画茎叶图的步骤如下：

1. 将每个数据分为茎（高位）和叶（低位）两部分，在此例中，茎为十位上的数字，叶为个位上的数字；

2. 将最小茎和最大茎之间的数按大小次序排成一列，写在左（右）侧；

3. 将各个数据的叶按大小次序写在其茎右（左）侧.

在运动员甲得分的茎叶图中，我们可以看到茎 2 有三片叶子（即 3、6 和 8），它们对应着得分数据 23，26 和 28；茎 4 没有任何叶子，说明没有数据介于 40～49 之间. 从茎叶图中的枝叶分布情况就可以感受到样本数据的分布特点.

茎叶图中数据的茎和叶的划分，可根据数据的特点灵活地决定. 例如数据是由整数部分和小数部分组成时，可以把整数部分作为茎，小数部分作为叶. 注意，如果茎叶图上每个枝上的叶数都不超过 1，我们就不能够从图中发现数据分布特点了，因此应该恰当地定义茎和叶的划分.

水量数据分布也可用茎叶图表示，此时可以把小数点前的数字作为茎，把小数点后的数字作为叶.

茎叶图、频率分布表和频率分布直方图都是用来描述样本数据的分布情况的. 茎叶图由所有样本数据构成，没有损失任何样本信息，可以在抽样的过程中随时记录（这对于教练员发现运动员现场状态特别有用）；而频率分布表和频率分布直方图则损失了样本的一些信息，必须在完成抽样后才能制作.

正确利用三种分布的描述方法，都能得到一些有关分布的主要特点（如分布是否具有单峰性、是否具有对称性、样本点落在各分组中的频率等），这些主要特点受样本的随机性的影响比较小，更接近于总体分布的相应的特点.

频率分布表和频率分布直方图之间的密切关系是显然的，它们只不过是相同的数据的两种不同的表达方式. 茎叶图和频率分布表极为类似，事实上，茎相当于频率分布表中的分组；茎上叶的数目相当于频率分布表中指定区间组的频数.

2.2.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征

初中学过样本众数（样本观测值中出现次数最多的数）、样本中位数和平均数等数字特征，它们可以作为总体相应特征的估计.

既然频率分布可以作为总体分布的估计，因此总体的各种数字特征也可以利用频率分布来估计，

这为我们提供了估计总体分布数字特征的新思路．基于此种想法，教科书中介绍了利用频率分布直方图估计总体众数、总体中位数和总体平均数的方法．

这里有一个思考栏目“2.03这个中位数的估计值，与样本的中位数值2.0不一样，你能解释一下原因吗?”用意是让学生知道样本中位数与通过频率直方图估计的中位数的不同．引起不同的原因是频率直方图已经损失了一些样本的信息．进一步地，总体的各种数字特征都可以由两种途径来估计，即直接利用样本数据或由频率分布直方图来估计．两种方法各有利弊，例举如下：

1. 通过频率分布直方图的估计精度低；

2. 通过频率分布直方图的估计结果与数据分组有关；

3. 在不能得到样本数据，只能得到频率分布直方图的情况下，也可以估计总体特征．

这里设置了另一个思考栏目“中位数不受少数几个极端值的影响，这在某种情况下是一个优点，但它对极端值的不敏感有时也会成为缺点，你能举例说明吗?”目的是想引导学生思考对极端值不敏感的利与弊．

对极端值不敏感有利的例子：考察表2-1中的数据，如果把最后一个数据错写成22，并不会对样本中位数产生影响．也就是说对极端数据不敏感的方法能够有效地预防错误数据的影响，而在实际应用中，人为操作的失误经常造成错误数据．

对极端值不敏感有弊的例子：某人具有初级计算机专业技术水平，想找一份收入好的工作．这时如果采用各个公司计算机专业技术人员收入的中位数作为选择工作的参考指标就会冒这样的风险：很可能所选择公司的初级计算机专业技术水平人员的收入很低，其原因是中位数对极小的数据不敏感．这里更好的方法是同时用平均工资和中位数来作为参考指标，选择平均工资较高且中位数较大的公司就业．对极端值不敏感的方法，不能反映数据中的极端情况．

本小节的第二个探究栏目，目的是谨防利用人们对统计术语的模糊认识进行误导（蒙骗），使学生能够正确理解在日常生活中像“我们单位的收入水平比别的单位高”这类话的模糊性，这里的“收入水平”是指员工收入数据的某种中心点，即可以是中位数、平均数或众数，不同的解释有不同的含义．

在这里应该引导学生注意以下几点：

1. 样本众数通常用来表示分类变量的中心值，容易计算．但是它只能表达样本数据中的很少一部分信息，通常用于描述分类变量的中心位置．

2. 中位数不受少数几个极端数据（即排序靠前或排序靠后的数据）的影响，容易计算．它仅利用了数据中排在中间数据的信息．当样本数据质量比较差，即存在一些错误数据（如数据的录入错误、测量错误等）时，应该用抗极端数据强的中位数表示数据的中心值．可以利用计算机模拟样本，向学生展示错误数据对样本中位数的影响程度．

3. 平均数受样本中的每一个数据的影响，“越离群”的数据，对平均数的影响也越大．与众数和中位数相比，平均数代表了数据更多的信息．当样本数据质量比较差时，使用平均数描述数据的中心位置可能与实际情况产生较大的误差．可以利用计算机模拟样本，向学生展示错误数据对样本平均数的影响程度．在体育、文艺等各种比赛的评分中，使用的是平均数．计分过程中采用“去掉一个最高分，去掉一个最低分”的方法，就是为了防止个别裁判的人为因素而给出过高或过低的分数对选手的得分造成较大的影响，从而降低误差，尽量保证公平性．

4. 如果样本平均数大于样本中位数，说明数据中存在许多较大的极端值；反之，说明数据中存在许多较小的极端值．在实际应用中，如果同时知道样本中位数和样本平均数，可以使我们了解样本数据中极端数据的信息，帮助我们作出决策．

5. 使用者常根据自己的利益去选取使用中位数或平均数来描述数据的中心位置，从而产生一些误导作用．

可以有多种方法描述样本数据的离散程度，最常用的就是样本标准差（方差），它反映了各个样本数据聚集于样本平均数周围的程度. 标准差越大，表明各个样本数据在样本平均数的周围越集中；反之，标准差越小，表明各个样本数据在样本平均数的两边越分散.

在介绍标准差内容时，教科书通过边空的形式提出问题“标准差的取值范围是什么？标准差为 0 的样本数据有什么特点？”目的是引导学生发现标准差的两个有用性质，即非负性，和标准差为 0 意味着所有的样本数据都相等的特性. 教学过程中，可以构造一个容量为 2 的样本：x_1 和 x_2（$x_1<x_2$），让学生体会两个样本数据分散程度与样本标准差 $a=\frac{x_2-x_1}{2}$ 之间的关系，总结出标准差等于 0 意味着所有的样本数据都等于样本平均数的结论.

在实际应用中，标准差常被理解为稳定性. 例如在比较两个人的成绩时，标准差小意味着成绩稳定；在描述产品的质量时，标准差越小，说明产品的质量越稳定. 结合样本平均数和样本标准差解决实际问题，这在教科书对两位运动员射击成绩的讨论和例 2 中已有充分的展示. 教学中，还可以利用数字特征平均数和标准差对教科书上甲乙两名射击运动员得分情况进行分析，使学生养成从多个角度看问题的习惯，锻炼创造性思维.

下面是本小节例题的编写说明和教学建议.

例 1 主要让学生通过频率分布直方图对标准差有一个直观的印象.

结合例 2，让学生体会利用平均数和标准差来比较质量、成绩、能力等实际问题的方法. 但是，由于样本数据具有随机性，所以所得结论有可能出错. 进一步地，应该提醒学生注意以下两点：

1. 样本数字特征的随机性：这种随机性由样本的随机性而引起.

2. 样本数字特征的规律性：在很广泛的条件下，（简单随机）样本的数字特征（众数、中位数、平均数和标准差）随样本容量的增加而稳定于总体相应的数字特征（总体的数字特征是一定的，不存在随机性）.

上面的两个性质可以通过计算机模拟来演示. 为了使学生充分理解以上两点，教学时应当提醒学生认真体会教科书第 69 页最后一段话的含义. 另外，为了使学生形成更加直接的经验，可以按照边空中的提示，让学生列出从含 6 个个体的总体中抽出 3 个组成样本的所有可能的样本数，并回答一下以全班同学的身高为总体时，从中抽出 20 个身高组成样本，可能的样本有多少个（例如，50 人组成的班级，可能的样本数为 C_{50}^{20}，这是一个很大的数），从而进一步地引导学生体会，样本具有随机性，因此样本数字特征也有随机性.

在阅读与思考栏目“生产过程中的质量控制图”中，结合前面总体密度曲线、平均数和标准差的概念引出正态分布密度曲线所必备的一些特点. 无论是在理论上还是在应用上，正态分布都是极其重要的一个分布. 正态分布的这些特点应用到质量控制中，可使学生进一步加强对标准差的认识. 标准差不但可以用来刻画随机变量相对于平均数的离散程度，在实际中还有广泛的应用，例如可以在产品质量控制中用来建立控制界限.

四、习题解答

练习（第 61 页）

1. **说明** 由于样本的极差为 364.41－362.51＝1.90，取组距为 0.19，将样本分为 10 组. 可以按照书上的方法制作频率分布表、频率分布直方图和频率折线图.

2. **说明** 此题目属于应用题，没有标准的答案.

3. 茎叶图为：

茎	叶
10	7 8
11	0 2 2 2 3 6 6 6 7 7 8
12	0 0 1 2 2 3 4 4 6 6 7 8 8
13	0 2 3 4

由该图可以看出 30 名工人的日加工零件个数稳定在 120 件左右.

练习（第 64 页）

这里应该采用平均数来表示每一个国家项目的平均金额，因为它能反映所有项目的信息. 但平均数会受到极端数据 2 200 万元的影响，所以大多数项目投资金额都和平均数相差比较大.

练习（第 70 页）

1. 甲乙两种水稻 6 年平均产量的平均数都是 900，但甲的标准差约等于 23.8，乙的标准差约等于 42.6，所以甲的产量比较稳定.
2. (1) 平均重量 $\bar{x}\approx 496.86$，标准差 $s\approx 6.55$.
   (2) 重量位于 $(\bar{x}-s,\ \bar{x}+s)$ 之间有 14 袋白糖，所占的百分比约为 66.67%.
3. (1) 略.
   (2) 平均数 $\bar{x}\approx 19.25$，中位数为 15.2，标准差 $s\approx 12.50$. 这些数据表明这些国家男性患该病的平均死亡率约为 19.25，有一半国家的死亡率不超过 15.2，$\bar{x}>15.2$ 说明存在大的异常数据，值得关注. 这些异常数据使标准差增大.

习 题 2.2（第 72 页）

A 组

1. (1) 茎叶图为：

茎	叶
0.0	7
0.2	4
0.3	9
0.5	4
0.6	1
0.7	2
0.8	1 2 4
0.9	15 8 8
1.0	2 2 8
1.1	4
1.2	0 0 6 9
1.3	1 7
1.4	0 4
1.5	8
1.6	2 8
1.8	5
2.1	0

(2) 汞含量分布偏向于大于 1.00ppm 的方向，即多数鱼的汞含量分布在大于 1.00ppm 的区域.

(3) 不一定. 因为我们不知道各批鱼的汞含量分布是否都和这批鱼相同. 即使各批鱼的汞含量分布相同，上面的数据只能为这个分布作出估计，不能保证平均汞含量大于 1.00ppm.

(4) 样本平均数 $\bar{x}\approx1.08$，样本标准差 $s\approx0.45$.

(5) 有 28 条鱼的汞含量在平均数与 2 倍标准差的和（差）的范围内.

2. 作图略.

从图形分析，发现这批棉花的纤维长度不是特别均匀，有一部分棉花的纤维长度比较低，所以在这批棉花中混进了一些次品.

3. **说明** 应该查阅一下这所大学的其他招生信息，例如平均数信息、最低录取分数线信息等. 尽管该校友的分数位于中位数之下，而中位数本身并不能提供更多录取分数分布的信息.

在已知最低录取分数线的情况下，很容易做出判断；在已知平均数的情况下，如果平均数小于中位数很多，则说明最低录取分数线较低，可以推荐该校友报考这所大学，否则还要获取其他的信息（如标准差的信息）来做出判断.

4. **说明** (1) 对，从平均数的角度考虑；

(2) 对，从标准差的角度考虑；

(3) 对，从标准差的角度考虑；

(4) 对，从平均数和标准差的角度考虑.

5. (1) 不能. 因为平均收入和最高收入相差太多，说明高收入的职工只占极少数. 现在已经知道至少有一个人的收入为 $x_{50}=100$ 万元，那么其他员工的收入之和为

$$\sum_{i=1}^{49} x_i = 3.5\times50-100=75(\text{万元}),$$

每人平均只有 1.53 万元. 如果再有几个收入特别高者，那么初进公司的员工的收入将会很低.

(2) 不能，要看中位数是多少.

(3) 能，可以确定有 75%的员工工资在 1 万元以上，其中 25%的员工工资在 3 万元以上.

(4) 收入的中位数大约是 2 万. 因为有年收入 100 万这个极端值的影响，使得年平均收入比中位数高许多.

6. 甲机床的平均数 $\bar{x}_{甲}=1.5$，标准差 $s_{甲}=1.2845$；乙机床的平均数 $\bar{y}_{乙}=1.2$，标准差 $s_{乙}=0.8718$. 比较发现乙机床的平均数小而且标准差也比较小，说明乙机床生产出的次品比甲机床少，而且更为稳定，所以乙机床的性能较好.

7. (1) 总体平均数为 199.75，总体标准差为 95.26.

(2) 可以使用抓阄法进行抽样. 样本平均数和标准差的计算结果和抽取到的样本有关.

(3) (4) 略.

说明 此题主要让学生体会样本数字特征的随机性与规律性.

对于问题 (3)，由样本的随机性知：(2) 和 (3) 的计算结果不相同的概率相当大；而相同的概率很小. 这意味着大多数学生的 (2) 和 (3) 的计算结果不同，只有个别学生会得到相同的结果. 应该从样本的随机性的角度解释 (3).

问题 (4) 中的关系是：随着样本容量的增加，分别用样本平均数和样本标准差估计总体平均数和总体标准差的效果会越来越好（即精度会越来越高）. 但是由于样本的随机性，也有极个别（小概率）的例外情况.

教师可以结合全体学生的答案展示上面提到的一般结论，使学生体会“随着样本容量的增加，用样

本数字特征估计总体相应的数值特征的精度会越来越高”这句话的真实含义.

用样本平均数估计总体平均数的规律性的具体展示方法如下：计算样本容量为 7 时，所有学生得到的样本平均数数据的平均数 $\overline{x}_7$ 和标准差 s_7. 类似地，计算样本容量为 10，13，16，19 的情况，分别得到 $\overline{x}_{10}$，$\overline{x}_{13}$，$\overline{x}_{16}$，$\overline{x}_{19}$，和标准差 s_{10}，s_{13}，s_{16}，s_{19}. 结果 $\overline{x}_7$，$\overline{x}_{10}$，$\overline{x}_{13}$，$\overline{x}_{16}$，$\overline{x}_{19}$ 应该越来越接近于总体平均数 199.75；而 s_7，s_{10}，s_{13}，s_{16}，s_{19} 应该越来越小，说明样本平均数的分布随着样本容量的增加，越来越集中于总体平均数的附近，即随机性越来越小.

B 组

1. (1) 由于测试 T_1 的标准差小，所以测试 T_1 结果更稳定，所以该测试做得更好一些.

(2) 由于 T_2 测出的值偏高，有利于增强队员的信心，所以应该选择测试 T_2.

(3) 将 10 名运动员的测试成绩标准化，得到如下的数据：

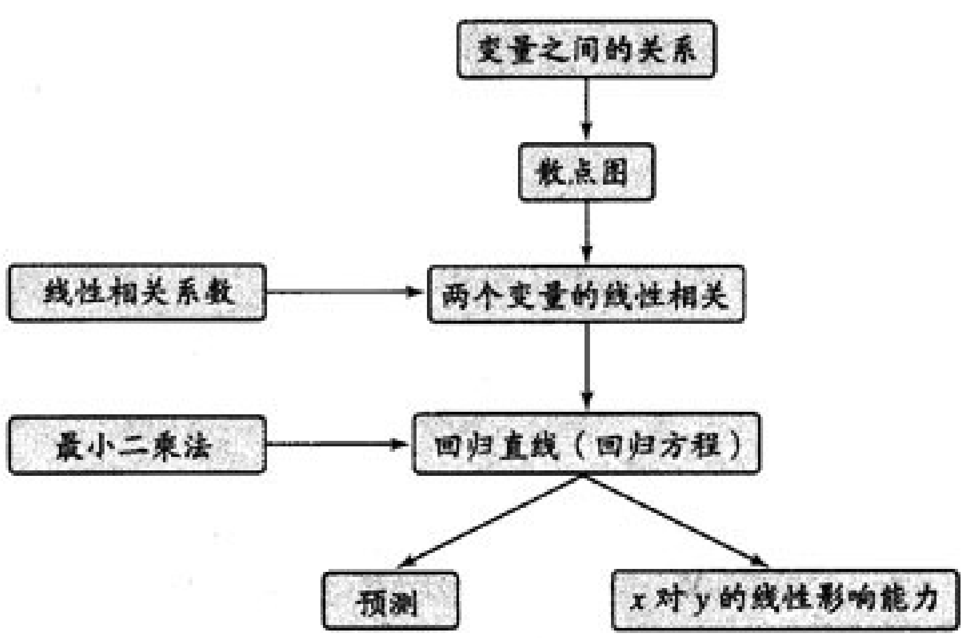
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
$(T_1-20)\div 2$	0.00	1.50	2.00	−1.00	−1.50	−2.00	2.50	2.00	0.50	−0.50
$(T_2-35)\div 3$	−1.33	1.33	1.33	−2	−2.33	−1.33	1.67	−1.67	−1.33	−1.67

从两次测试的标准化成绩来看，运动员 G 的平均体能最强，运动员 E 的平均体能最弱.

2. **说明** 此题需要在本节开始的时候就布置，先让学生分头收集数据，汇总所收集的数据才能完成题目.

2.3 变量间的相关关系

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 利用散点图直观认识两个变量之间的线性关系.

2. 了解最小二乘法的思想.

3. 根据给出的线性回归方程的系数公式建立线性回归方程.

4. 变量之间相关关系的理解.

难点：回归思想的建立；对回归直线与观测数据的关系的理解.

三、编写意图与教学建议

教科书通过思考栏目“物理成绩与数学成绩之间的关系”引导学生考察变量之间的关系. 在讨论这种关系的过程中，使学生认识到在现实世界中存在不能用函数模型描述的变量关系，从而体会研究变量之间的相关关系的重要性.

随后，教科书通过探究人体脂肪百分比和年龄之间的关系，引入描述两个变量之间关系的线性回归方程（模型），使学生通过探索用多种方法确定线性回归直线，体会最小二乘法的思想，掌握计算回归方程的斜率与截距的方法. 通过引导学生观察对应于年龄 x 的脂肪含量数据 y 和 $\hat{y}=0.576x-0.446$ 之间的关系，领悟到利用回归方程可以做预测. 通过气温与饮料销售量的例子及随后的思考，使学生了解利用线性回归方程解决实际问题的全过程，体会线性回归方程做出的预测结果的随机性，并且可能犯错误.

在阅读与思考栏目“线性关系的强与弱”中，进一步介绍了描述两个变量之间关系强弱的样本特征相关系数的计算公式及统计含义，通过具有不同相关系数的数据的散点图，进一步加深对相关系数的直观理解.

教学中，应该让学生了解本节知识和其他数学知识之间的相互关系，从总体上把握研究变量之间关系的基本方法，体会利用线性回归方程解决实际问题的全过程以及对所得结论的正确理解.

2.3.1 变量之间的相关关系

在本小节的教学中，应该使学生了解：

1. 变量之间除了函数关系之外，还有相关关系，即从总的变化趋势来看变量之间存在着某种关系，但这种关系又不能用函数关系精确表达出来.

2. 两个变量之间产生相关关系的原因是许多不确定的随机因素的影响.

3. 需要通过样本来判断变量之间是否存在相关关系.

2.3.2 两个变量的线性相关

教科书以一个探究栏目为切入点，在探究的过程中向学生展示了研究两个变量之间的线性相关关系实现方法以及具体过程. 这里的探究为“人体的脂肪含量与年龄之间的关系”.

对于探究栏目中的数据，可以提出一个问题“你认为表中的数据应该是哪一种样本特征数（平均数）?”提出这个问题的用意是让学生注意到总体中的“个体”含义可能比自然的个体含义广. 在这里，自然的个体是一个人，而总体中的“个体”则可以依据我们感兴趣的问题的不同而定义为“某一年龄的所有人”，或定义为一个具体的人. 如果“个体”是由一个群体组成，那么“个体”的观察值就应该是相应群体的平均数. 在研究变量之间的相关关系时，如果数据是平均数，则两个变量之间的关系更强，接近于函数关系，即两个变量的点坐标更接近于函数曲线. 从散点图 2.3-1 来看，表 2-3 中的数据并不集中在任何一条直线附近，可以认为这里的数据不是特定年龄人群脂肪含量的平均数.

要判断是用函数模型还是随机模型来研究变量之间的关系，可以从散点图的角度来进行. 在讨论两个变量 x 和 y 之间的关系时，常把它们写成向量的形式(x, y)，以便利用平面直角坐标系来考察它

们之间的关系．此时 x 和 y 可以看成描述同一个体的两个不同特征的量，例如人的身高和体重之间的关系，学生的数学成绩和物理成绩之间的关系，树高和树直径之间的关系等．此时容量为 n 样本的观察数据 x 和 y 总是成对出现，可以用列表的方式给出，也可以用向量（点）的形式表示为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)．称这样的一些点为样本点，把样本点画在平面直角坐标系上，就得到样本的散点图．

教学中要特别向学生强调：在研究两个变量之间是否存在某种关系时，必须从散点图入手．对于散点图，可以做出如下判断：

1. 如果所有的样本点都落在某一函数曲线上，就用该函数来描述变量之间的关系，即变量之间具有函数关系．

2. 如果所有的样本点都落在某一函数曲线附近，变量之间就有相关关系．

3. 如果所有的样本点都落在某一直线附近，变量之间就有线性相关关系．

教科书主要介绍线性相关关系．线性相关关系又分为正相关和负相关．正相关指的是两个变量有相同的变化趋势，即从整体上来看一个变量会随另一个变量变大而变大，这在散点图上的反映就是散点的分布在斜率大于 0 的直线附近；负相关指的是两个变量有相反的变化趋势，即从整体上来看一个变量会随另一个变量变大而变小，这在散点图上的反映就是散点的分布在斜率小于 0 的直线附近．

教科书利用探究栏目中的数据介绍了正相关散点图的特点，通过思考栏目的第 1 个问题引导学生举一反三地发现负相关散点图的特点．思考栏目的第 2 个问题“你能举出一些生活中的变量成正相关或负相关的例子吗?”目的是让学生知道可以利用线性相关的观点分析日常生活中变量之间的关系．这样的例子很多，如身高和体重、汽车重量和百公里耗油量、平均每天体育锻炼时间和平均每分钟心跳次数、平均日学习时间和平均学习成绩等．而判断两个变量之间到底是不是具有线性相关关系，可以用数据“说话”，画出散点图更具有说服力．在教学过程中可以鼓励学生从收集数据开始，然后作出散点图，最后分析是正相关还是负相关，使学生经历收集数据、分析数据以及做出判断的全过程．

通过探究人体脂肪百分比和年龄之间的关系，借助散点图，学生可以体会正线性相关、负线性相关以及回归直线和回归方程的概念．在这里还要提醒学生：只有散点图中的点呈条状集中在某一直线周围的时候，才可说两个变量之间具有线性相关关系，才有两个变量的正线性相关和负线性相关的概念，才可以用回归直线来描述两个变量之间的关系．

教科书在探索求解回归直线之前，提出一个边空问题“回归直线通过样本点的中心，比照平均数与样本数据之间的关系，你能说说回归直线与散点图中各点之间的关系吗?”意在引导学生通过类比找到样本点与回归直线之间的关系．假设样本点为 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，记 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，则 $(\bar{x},\bar{y})$ 为样本点的中心，回归直线一定过这一点．对于单变量样本数据而言，平均数是样本数据的中心，类似地对双变量样本点而言，回归直线是样本点的中心．

在探索求解回归直线的过程中，引导学生体会用数学方法刻画“从整体上看，各点与此直线的距离最小”的重要性（靠测量费时、费力，且精度差）．在探究用数学方法刻画“从整体上看，各点与此直线的距离最小”的过程中，使学生体会根据实际问题的背景选择正确、恰当的数学表达式，可以使问题更容易解决．整个探究过程中，需要学生的创造性思维活动，使学生在尝试各种解决问题的方法的过程中，不断积累经验，加深对问题的认识．希望此项探究使学生进一步体会通过探索解决实际问题的方法．

通过探究，教科书指出：求回归方程的关键是如何用数学的方法刻画“从整体上看，各点与此直线的距离最小”．接下来通过边空提出问题，引导学生思考这个结论的含义．如果直线的方程为

$$y=\beta x+\alpha,$$

用 $\rho(\alpha,\ \beta,\ i)$ 表示第 i 个样本点 $(x_i,\ y_i)$ 与直线之间的距离，则从总体上看各点与此直线的距离可以用所有样本点与回归直线的距离来表示，即用下面的公式

$$Q(\alpha,\beta)=\sum_{i=1}^{n}\rho(\alpha,\beta,i)$$

来表示. 注意到上面的等式对于任何实数 α 和 β 都有定义，因此可把 $Q(\alpha,\ \beta)$ 看成二元函数. 这样，"从整体上看，各点与此直线的距离最小" 的含义是回归方程的截距 a 和斜率 b 构成的点 $(a,\ b)$ 应该是函数 $Q(\alpha,\ \beta)$ 的最小值点. 特别地，当

$$\rho(\alpha,\ \beta,\ i)=(y_i-\beta x_i-\alpha_i)^2$$

时，$(a,\ b)$ 应该使函数

$$Q(\alpha,\ \beta)=(y_1-\beta x_1-\alpha)^2+(y_2-\beta x_2-\alpha)^2+\cdots+(y_n-\beta x_n-\alpha)^2$$

达到极小值，即 a 和 b 由公式① (教科书第 80 页) 给出.

为使学生理解回归方程在预测方面的应用原理，教科书通过思考栏目提出问题 "将表 2-3 中的年龄作为 x 代入上述回归方程，看看得出的数值与真实数值之间的关系. 从中你体会到什么?" 教学中可以让学生将真实值和由回归方程计算出的值列成下表：

表 1 人体脂肪观察值与回归值

年龄	23	27	39	41	45	49	50
脂肪值	9.5	17.8	21.2	25.9	27.5	26.3	28.2
回归值	12.802	15.106	22.018	23.17	25.474	27.778	28.354

年龄	53	54	56	57	58	60	61
脂肪值	29.6	30.2	31.4	30.8	33.5	35.2	34.6
回归值	30.082	30.658	31.81	32.386	32.962	34.114	34.69

在上表中，回归值就是由回归方程计算得到的值. 引导学生通过比较发现表中样本个体脂肪值和由回归方程计算得到的值很接近，领悟可以用回归方程来预测特定年龄的人的脂肪值.

教科书中例题的 4 个问题，实际上给出了研究两个变量之间线性相关关系的一般步骤. 在本节的例子之后，通过思考栏目 "气温为2 ℃时，小卖部一定能够卖出 143 杯左右热饮吗? 为什么?" 使学生进一步体会预报值的含义. 这里的答案是小卖部不一定能够卖出 143 杯左右热饮，原因如下：

1. 线性回归方程中的截距和斜率都是通过样本估计出来的，存在随机误差，这种误差可以导致预测结果的偏差.

2. 即使截距和斜率的估计没有误差，也不可能百分之百地保证对应于 x 的预报值，$\hat{y}$能够与实际值 y 很接近. 我们不能保证点 $(x,\ y)$ 落在回归直线上，甚至不能百分之百地保证它落在回归直线的附近. 事实上，

$$y=bx+a+e=\hat{y}+e,$$

这里 e 是随机变量，预报值$\hat{y}$与实际值 y 的接近程度由随机变量 e 的标准差所决定.

教学中，一些学生可能会提出问题：既然不一定能够卖出 143 杯左右热饮，那么为什么我们还以 "这天大约可以卖出 143 杯热饮" 作为结论呢? 这是因为这个结论出现的可能性最大. 具体地说，假如我们规定可以选择连续的 3 个非负整数作为可能的预测结果，则我们选择 142，143 和 144 能够保证预测成功 (即实际卖出的杯数是这 3 个数之一) 的概率最大.

教学中，还应让学生体会线性回归方程和由它所作出的预报具有随机性的特点. 实际上，在线性

回归方程$\hat{y}=bx+a$中，由教科书中的①式知，a和b都是由样本计算得到的，因此样本的随机性导致了a和b的随机性，从而使线性回归方程和预报值$\hat{y}$具有随机性．可以利用书上的表2-3中的数据展示回归方程的随机性（或利用计算机模拟），具体方法如下：

1. 从表中任意抽取5对数据；
2. 利用抽出的5对数据建立线性回归方程．

将上述两步重复若干次，一定可以得到不同的回归方程，这说明所建立的线性回归方程和预报值都依赖于样本，具有随机性．

阅读与思考栏目“相关关系的强与弱”的教学建议

这里通过相关系数来描述两个变量相关关系的强弱，通过不同相关系数样本的散点图，使学生理解相关系数的绝对值越大，用线性回归模型拟合样本数据的效果就越好．

“实习作业”的教学建议

统计的教学需要学生自己的亲身实践，纸上谈兵是难以学会统计知识、领会统计思想的．教学中应注意选择恰当的实例，创设问题情境，鼓励学生积极参与，在自己的亲身实践中体会和理解所学内容的基本思想和意义．

为了促使学生系统经历统计过程，教科书设置了“实习作业”，教学中应当充分重视它．关于实习作业的题目和实习报告的格式，教师可以根据本校的实际情况确定，教科书只给了两个可供参考的题目和实习报告的格式．教学中，可以先让学生在课余时间收集数据，经过自己的数据处理后写出实习报告，然后再到课堂上进行交流（实习作业的1个课时就是用来交流的）．

“小结”的教学建议

教科书在小节中对本章的知识点进行了总结．这里的总结以两种形式给出，即“本章的知识结构”和“回顾与思考”．教学中，要注意引导学生利用知识结构框图梳理本章的各个知识点之间的逻辑关系，按照知识框图提供的线索复习回忆各个知识点的内容及相关的应用．

教科书在回顾与思考栏目中，主要简单回顾了一些重要的知识点，同时通过提出一些问题，考查学生是否掌握了本章的知识以及在本章的知识的实际应用中所需要注意的问题，其中特别注意强调了统计思想．这些问题的答案大部分可以从前面的内容中找到，这里不再重述．

下面列出了部分问题的解答要点．

1. 你能给国家统计局的城乡调查队设计一个调查公众当前最关心的十大问题的抽样方案吗？

解答要点：该问题可以用分层抽样的思想来设计抽样方案，可分如下几个步骤：

（1）按行政区分层；

（2）确定各层抽取个体的数目；

（3）用简单随机抽样方法在各层中抽取个体．

2. 在什么情况下用中位数比用众数、平均数好一些？

解答要点：在样本数据质量比较差，即有很多错误数据的情况下．

3. 为什么说，如果平均数的大小与中位数大小差不多时，用平均数比用中位数更合适些？

解答要点：因为平均数包含了更多的样本信息．

四、教学设计案例

2.3 变量间的相关关系（约 4 课时）

1. 教学任务分析

（1）利用散点图直观认识变量间的相关关系.

① 明确事物间是相互联系的，认识现实生活中变量间存在的非确定性的相关关系，体会研究此类问题在现实生活中的重要性；

② 会作散点图，并由此对变量间的正相关或负相关关系作出直观的判断.

（2）经历描述两个变量线性相关关系的过程.

① 通过探究用不同估算方法描述两个变量线性相关关系的过程，学会用数量来描述现实关系；

② 知道最小二乘法的思想，了解其公式的推导过程；

③ 利用信息技术（如 Excel 软件、科学计算器）求回归方程.

2. 教学重点与难点

重点：

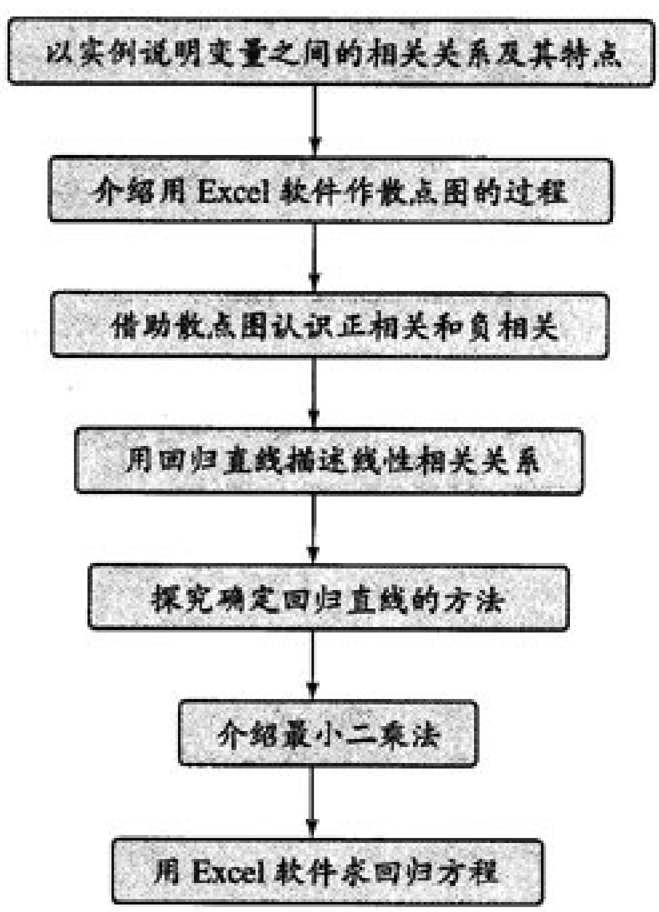
（1）利用散点图直观认识两个变量之间的相关关系.

（2）了解最小二乘法的思想.

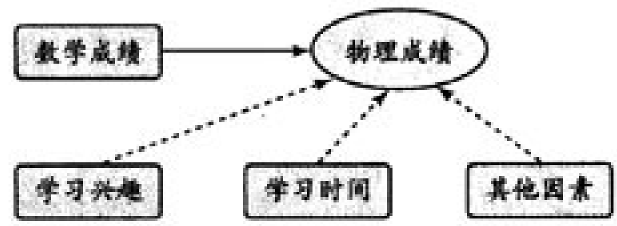
（3）根据给出的线性回归方程的系数公式建立回归方程.

难点：建立回归思想，理解回归直线与观测数据的关系.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

<table>
<tr><th>问题</th><th>问题设计意图</th><th>师生活动</th></tr>
<tr><td>（1）有些教师常说："如果你的数学成绩好，那么你的物理学习就不会有什么大问题."按照这种说法，似乎学生的物理成绩与数学成绩之间也存在着某种关系．你如何认识它们之间存在的关系？</td><td>引导学生关注现实生活中变量之间存在的不确定的关系，通过讨论，体会研究变量之间的相关关系的重要性.</td><td>学生讨论，发表意见.
教师引导学生总结：物理成绩和数学成绩是两个变量，从经验看，由于物理学习要用到较多的数学知识和数学方法，数学成绩的好坏影响着物理成绩的高低，即一个人的物理成绩确实与数学成绩有一定的关系．但除此之外，还存在其他影响物理成绩的因素，如学习物理的兴趣，用在物理学习上的时间等，如下图所示：


因此不能通过一个人的数学成绩来确定他的物理成绩，两个变量之间是一种不确定性的关系，产生这种关系的原因是受到许多不确定的随机因素的影响.</td></tr>
<tr><td>（2）举一两个现实生活中的问题，问题所涉及的变量之间存在一定的相关关系.</td><td>使学生进一步认识生活中两个变量之间的不确定的相关性.</td><td>学生举例.
教师引导学生认识：两个变量之间的关系，可能是确定性关系或非确定性关系．当自变量取值一定，因变量的取值带有一定随机性时，两个变量之间的关系称为相关关系．相关关系是一种非确定性关系.</td></tr>
<tr><td>（3）根据表 2-3 所提供的信息，你认为人体的脂肪含量与年龄之间有怎样的关系？</td><td>引出两个变量间的线性相关关系.</td><td>教师可以先引导学生明确散点图的作法：以成对的数据中的两个数分别作为横、纵坐标，在平面直角坐标系中描点，横、纵坐标的长度单位选取可以不同，应考虑到数据分布的特征．可以让学生先用笔在方格纸上试画.
接着，教师可以用计算机演示 Excel 软件作散点图的过程（见后面的说明），引导学生观察散点图，体会现实生活中两个变量之间的关系存在着不确定性，即散点图中的散点并不在一条直线上，只是散布在一条直线的周围.</td></tr>
</table>

补充例题：

1. 对某种鸡胚胎的生长进行研究，测得 5～20 日龄鸡的胚胎的重量如下：

日龄/天	5	6	7	8	9	10	11	12
胚重/g	0.250	0.498	0.846	1.288	1.656	2.662	3.100	4.579

日龄/天	13	14	15	16	17	18	19	20
胚重/g	6.518	7.486	9.948	14.522	15.610	19.914	23.736	26.472

（1）请作出这些数据的散点图；

（2）关于这两个变量的关系，你能得出什么结论？

2. 某机构曾研究温度对翻车鱼的影响．在一定温度下，经 x 单位时间，翻车鱼的存活比例为 y，数据如下：

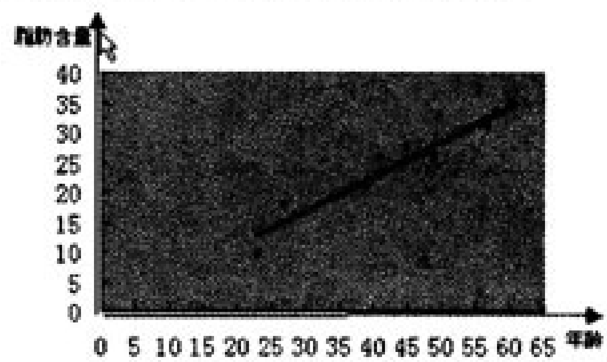
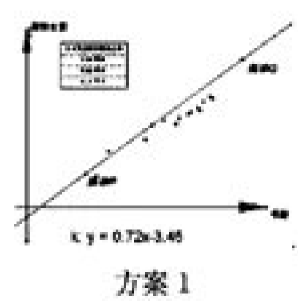
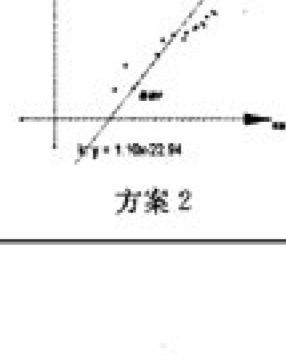
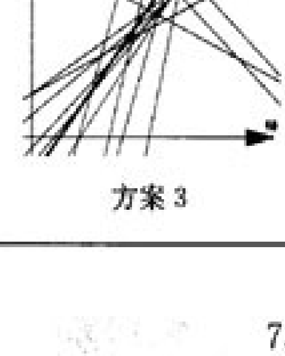
(0.1，1.00)，(0.15，0.95)，(0.20，0.95)，(0.25，0.90)，(0.30，0.85)，

(0.35，0.70)，(0.40，0.65)，(0.45，0.60)，(0.50，0.55)，(0.55，0.40)

（1）请作出这些数据的散点图；

（2）关于这两个变量的关系，你能得出什么结论？

续表

问 题	问题设计意图	师生活动
(4) 两个变量的相关关系有正相关和负相关，它们在散点图上各有什么特点？你还能举出一些生活中的变量成正相关或负相关的例子吗？	引导学生对观察的图表进行抽象概括，形成正相关和负相关的概念；关注生活中的数学，进一步理解概念.	学生讨论、交流，教师可适时进行必要的点评，并对比正相关和负相关两种散点图.
(5) 从数据的图、表中，能否进一步得出：人的年龄增加时，体内脂肪含量以什么样的方式增加呢？	培养学生根据图表进行观察分析的能力.	教师做好课件（如下图）引导学生观察、猜想：所有的点都大致分布在一条直线的附近，并给出回归直线的概念. 
(6) 你认为回归直线具有怎样的特征？应当如何求回归直线的方程呢？	引导学生自己刻画回归直线的本质特征，设计具体的操作步骤.	生：设计求回归直线方程的方案，如： 方案 1：采用测量的方法，先画一条直线，测量出各点到它的距离，然后移动直线，到达一个使距离之和最小的位置，测量出此时直线的斜率和截距，就得到回归方程. 方案 2：在图中选取两点画直线，使得直线两侧的点的个数基本相同. 方案 3：在散点图中多取几组点，确定几条直线的方程，分别求出各条直线的斜率和截距的平均数，将这两个平均数作为回归方程的斜率和截距. 师：引导学生分组，在计算机上实现自己的方案，并进行全班交流.  方案 1  方案 2  方案 3

续表

问题	问题设计意图	师生活动
（7）如何用你熟悉的数学知识来刻画“从整体上看各点与此直线距离最小”呢？	通过实践认识“最小二乘法”思想的巧妙之处.	教师引导学生推导最小二乘法的公式（见后面的说明）.
（8）如何利用计算器或计算机求回归方程？	学习用信息技术解决问题的思考方式和操作.	学生自己阅读教科书的相关内容，分组合作进行上机操作.
（9）小结：请你对本节课的内容进行小结，并谈谈你的收获以及课后的学习安排.	让学生进行小结，谈谈体会，帮助他们回顾反思、归纳概括.	教师应当引导学生关注最小二乘法的思想的总结.

5. 几点说明

1. 计算机作散点图的步骤如下：

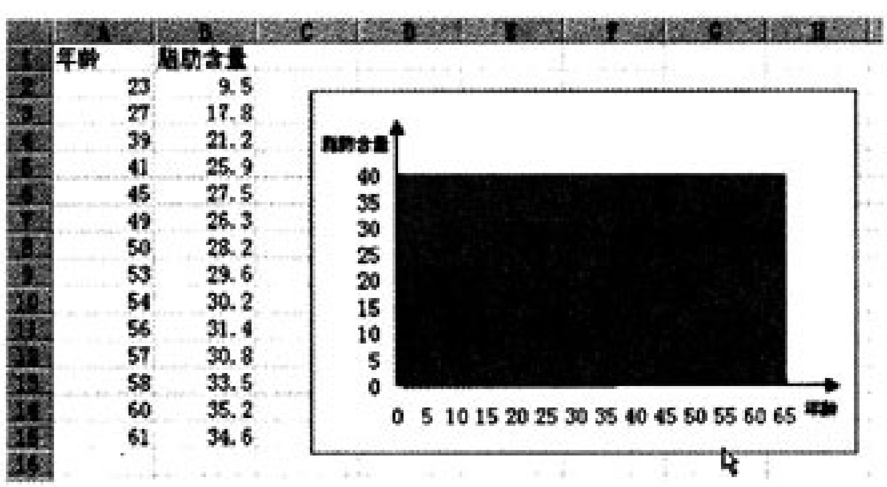
① 进入 Excel 软件操作界面，在 A1，B1 分别输入“年龄”“脂肪含量”，在 A，B 列输入相应的数据.

② 点击图表向导图标，进入“图表向导-4 步骤之 1-图表类型”对话框，选择“标准类型”中的“XY 散点图”，单击“下一步”.

③ 在“图表向导-4 步骤之 2-图表数据源”对话框中，选择“系列”选项，单击“添加”按钮添加系列 1，在“X 值”栏中输入年龄所在数据区域，在“Y 值”栏中输入脂肪含量所在数据区域，单击“下一步”.

④ 进入“图表向导-4 步骤之 3-图表选项”对话框，对图表的一些属性进行设置.

⑤ 单击“完成”按钮.



2. 最小二乘法的公式的探索过程如下：

设已经得到具有线性相关关系的变量的一组数据：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n).$$

设所求的回归直线方程为 $Y=bx+a$，其中 a，b 是待定的系数. 当变量 x 取 x_1，x_2，…，x_n 时，可以得到 $y_i=bx_i+a$（$i=1, 2, \cdots, n$）.

接下来的步骤为：

各偏差的和刻画“各点与此直线的整体偏差”.

求$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)$的最小值

由于(y_i-Y_i)可正可负，为避免相互抵消，取绝对值.

求$\sum\limits_{i=1}^{n}|y_i-Y_i|$的最小值

含绝对值，运算不太方便.

求$\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-Y_i)^2$的最小值

$Q=(y_1-bx_1-a)^2+(y_2-bx_2-a)^2+\cdots+(y_n-bx_n-a)^2$

当a，b取什么值时，Q的值最小，即总体偏差最小.

根据数学上求最小值的运算，求得a，b.

$$\begin{cases} b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})}, \\ a=\overline{y}-b\overline{x}. \end{cases}$$

五、习题解答

练习（第76页）

1. 从已经掌握的知识来看，吸烟会损害身体的健康. 但是除了吸烟之外，还有许多其他的随机因素影响身体健康，人体健康是很多因素共同作用的结果. 我们可以找到长寿的吸烟者，也更容易发现由于吸烟而引发的患病者，所以吸烟不一定引起健康问题. 但吸烟引起健康问题的可能性大，因此“健康问题不一定是由吸烟引起的，所以可以吸烟”的说法是不对的.
2. 从现在我们掌握的知识来看，没有发现根据说明“天鹅能够带来孩子”，完全可能存在既能吸引天鹅和又使婴儿出生率高的第3因素（例如独特的环境因素），即天鹅与婴儿出生率之间没有直接的关系，因此“天鹅能够带来孩子”的结论不可靠.

   而要证实此结论是否可靠，可以通过试验来进行. 相同的环境下将居民随机地分为两组，一组居民和天鹅一起生活（比如家中都饲养天鹅），而另一组居民的附近不让天鹅活动，对比两组居民的出生率是否相同.

说明 在探索研究的过程中，如果能够从两个变量的观察数据之间发现相关关系是极为有意义的，由此可以进一步研究二者之间是否蕴涵因果关系，从而发现引起这种相关关系的本质原因是什么. 本题的意义在于引导学生重视对统计结果的解释，从中发现进一步研究的问题.

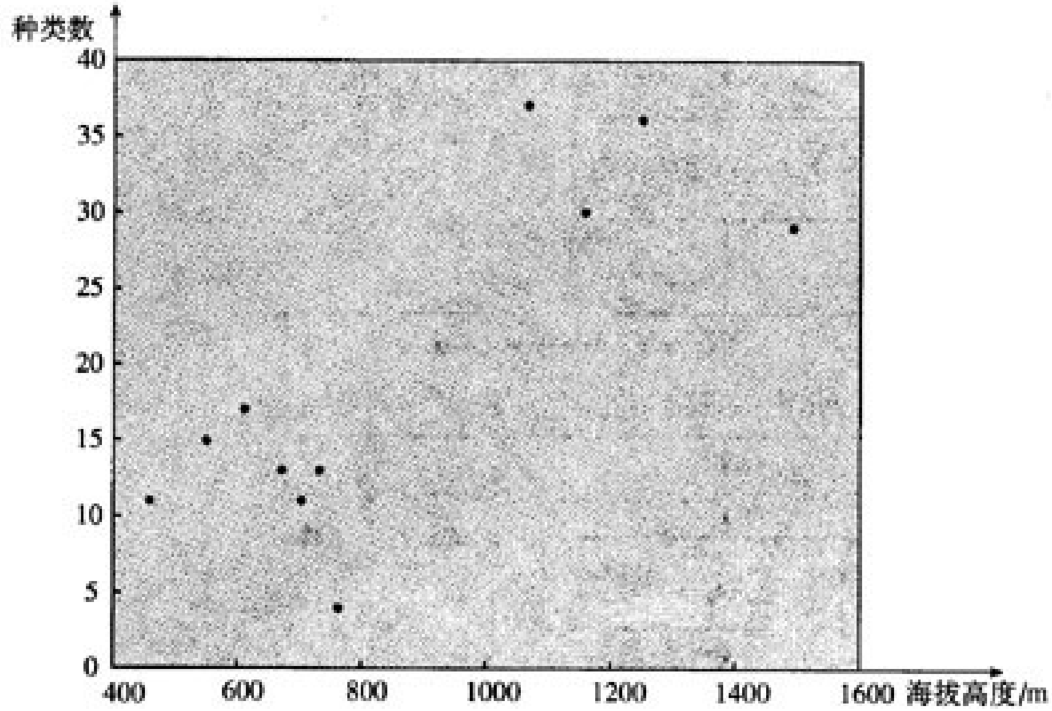
练习（第84页）

1. 当 $x=0$ 时，$\hat{y}=147.767$，这个值与实际卖出的热饮杯数150不符，原因是：线性回归方程中的截距和斜率都是通过样本估计的，存在随机误差，这种误差可以导致预测结果的偏差；即使截距和斜率的估计没有误差，也不可能百分之百地保证对应于 x，预报值 $\hat{y}$ 能够等于实际值 y. 事实上，

$$y=bx+a+e=\hat{y}+e,$$

这里 e 是随机变量，预报值 $\hat{y}$ 与实际值 y 的平均接近程度由随机变量 e 的标准差所决定.

2. 数据的散点图为：



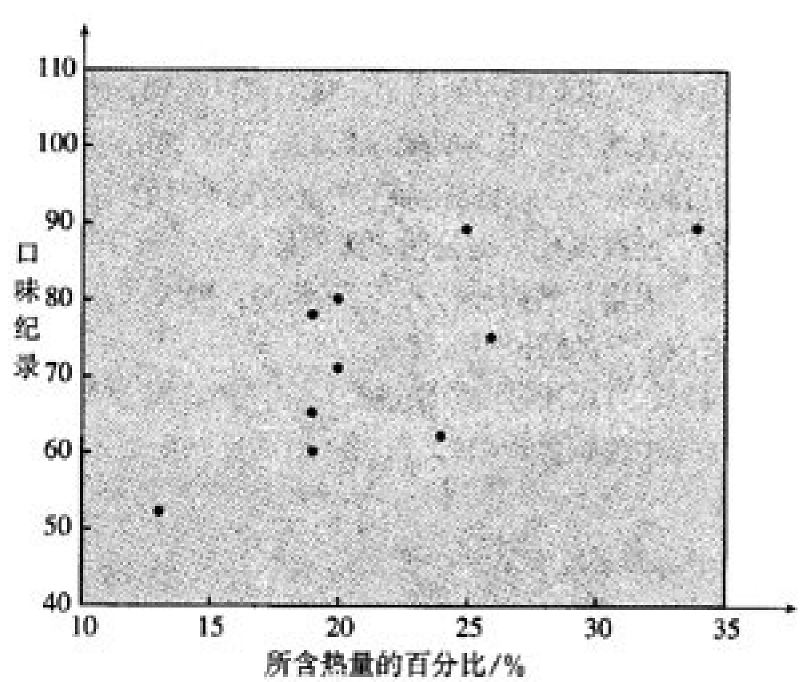
从这个散点图中可以看出，鸟的种类数与海拔高度应该为正相关（事实上相关系数为0.793）. 但是从散点的分布特点来看，它们之间的线性相关性不强.

习题2.3（第86页）

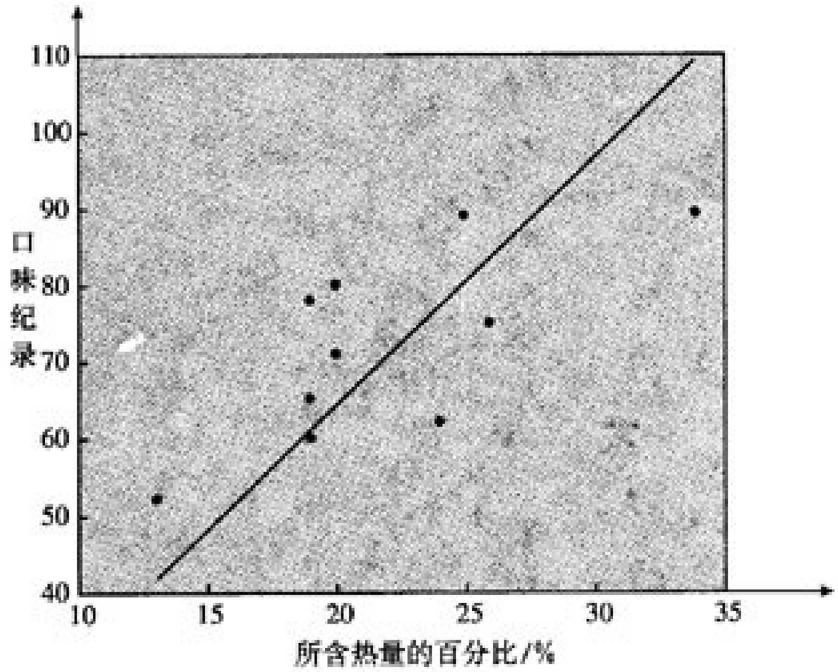
A组

1. 教师的水平与学生的学习成绩呈正相关关系. 又如，“水涨船高”“登高望远”等.

2. (1) 散点图如下：



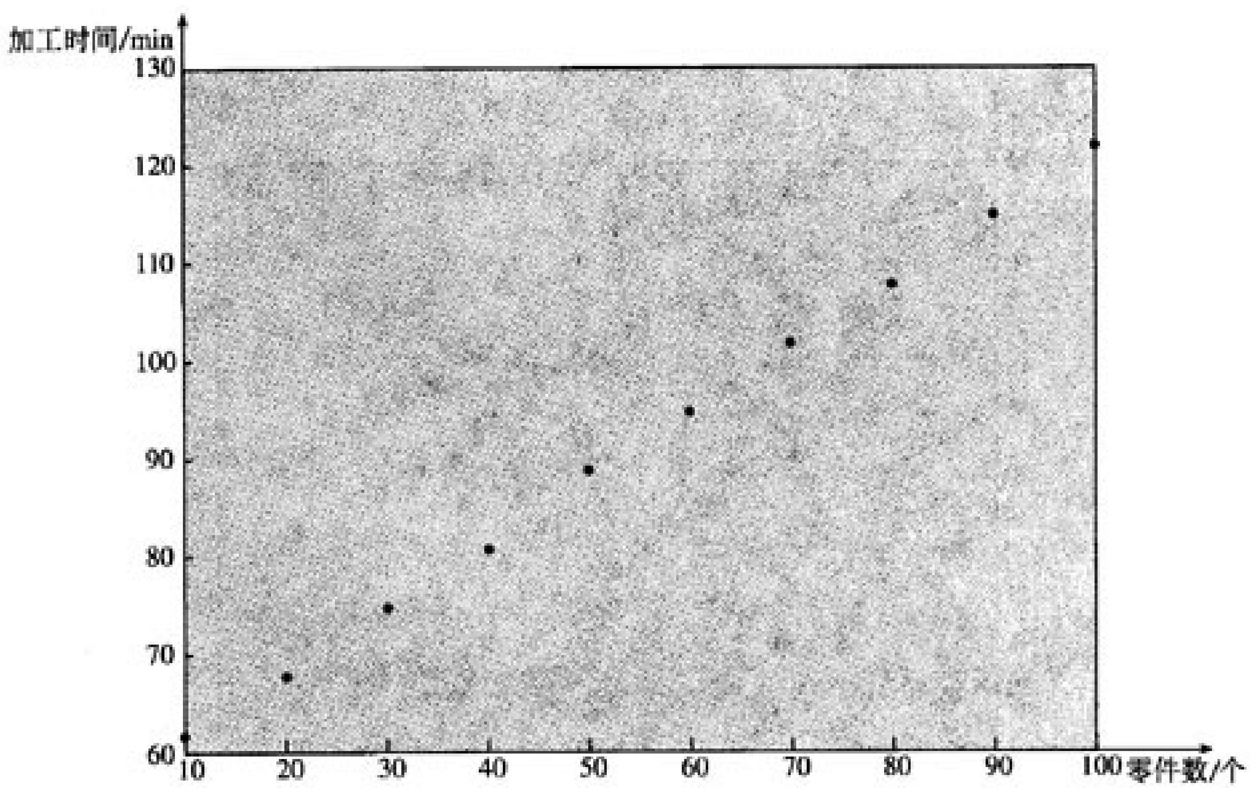
（2）回归直线如下图所示：



（3）基本成正相关关系，即食品所含热量越高，口味越好.

（4）因为当回归直线上方的食品与下方的食品所含热量相同时，其口味更好.

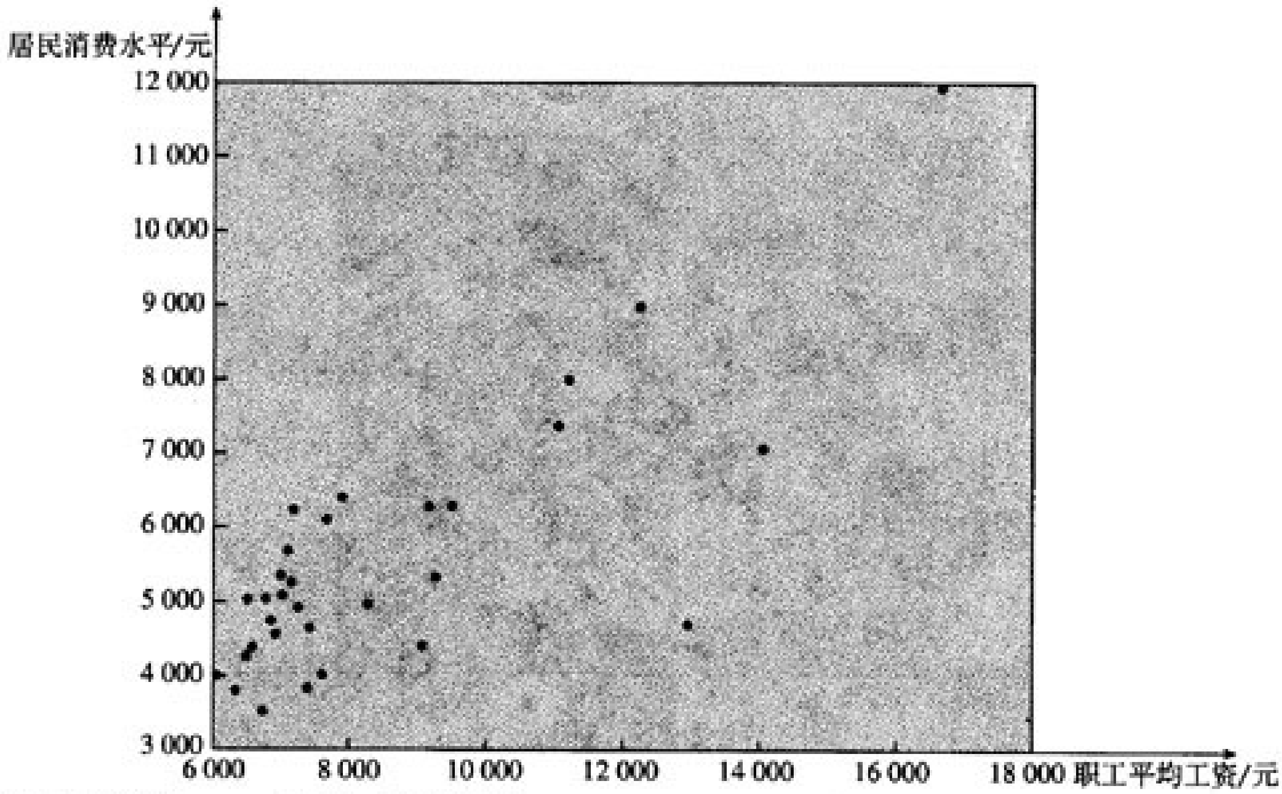
3.（1）散点图如下：



（2）回归方程为：$y=0.669x+54.933$.

（3）加工零件的个数与所花费的时间呈正线性相关关系.

4.（1）散点图为：

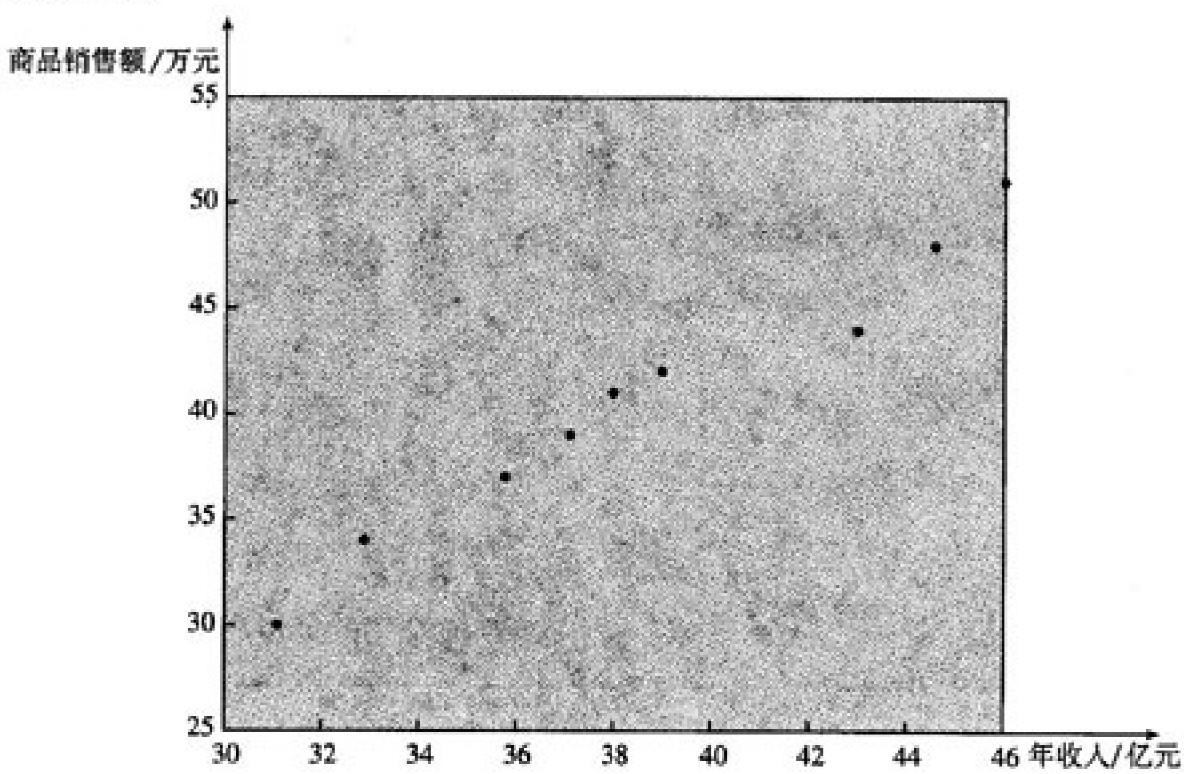


（2）回归方程为：$y=0.546x+876.425$.

（3）由回归方程知：居民的消费水平和工资收入之间呈正线性相关关系，即工资收入水平越高，居民的消费水平越高.

B组

1.（1）散点图如下：



（2）回归方程为：$y=1.447x-15.843$.

（3）如果这座城市居民的年收入达到40亿元，估计这种商品的销售额为$\hat{y}\approx 42.037$（万元）.

2. **说明** 本题是一个讨论题，按照教科书中的方法逐步展开即可.

复习参考题（第 92 页）解答

A 组

1. A.
2. (1) 该组中的数据个数，该组的频数除以全体数据总数；

   (2) $\frac{nm}{N}$.
3. (1) 这个结果意味着 A 城市中光顾这家服装连锁店的人比其他人较少倾向于选择咖啡色，因为光顾连锁店的人是一种方便样本，不能代表 A 城市其他人群的想法.

   (2) 这两种调查的差异是由样本的代表性所引起的. 因为 A 城市的调查结果来自于该市光顾这家服装连锁店的人群，这个样本不能很好地代表全国民众的观点.
4. **说明** 这是一个敏感性问题，可以模仿阅读与思考栏目“如何得到敏感性问题的诚实反应”来设计提问方法.
5. 表略.

   可以估计出句子中所含单词数的分布，以及与该分布有关的数字特征，如平均数、标准差等.
6. (1) 可以用样本标准差来度量每一组成员的相似性，样本标准差越小，相似程度越高.

   (2) A 组的样本标准差为 $S_A \approx 3.730$，B 组的样本标准差为 $S_B \approx 11.789$. 由于专业裁判给分更符合专业规则，相似程度应该高，因此 A 组更像是由专业人士组成的.
7. (1) 中位数为 182.5，平均数为 217.187 5.

   (2) 这两种数字特征不同的主要原因是，430 比其他的数据大得多，应该查找 430 是否由某种错误而产生的. 如果这个大数据的采集正确，用平均数更合适，因为它利用了所有数据的信息；如果这个大数据的采集不正确，用中位数更合适，因为它不受极端值的影响，稳定性好.
8. (1) 略.

   (2) 系数 0.42 是回归直线的斜率，意味着：对于农村考生，每年的入学率平均增长 0.42%.

   (3) 城市的大学入学率年增长最快.

   说明 (4) 可以模仿 (1) (2) (3) 的方法分析数据.

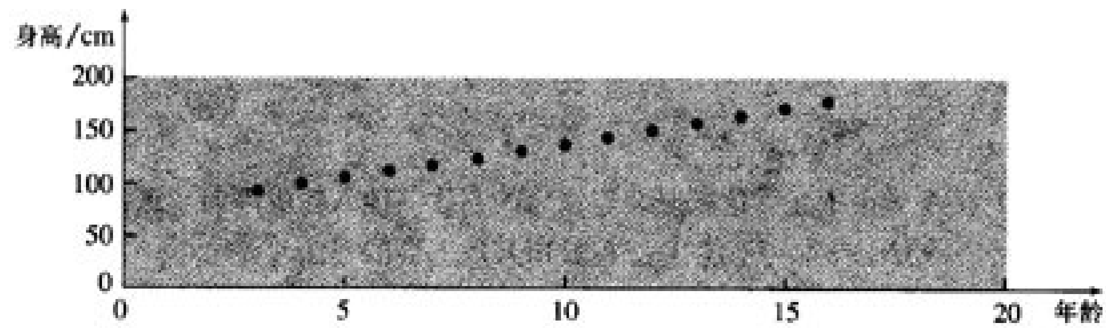
B 组

1. 频率分布如下表：

分组	频数	频率	累计频率
[12.34, 13.62]	2	0.04	0.04
(13.62, 14.9]	4	0.08	0.12
(14.9, 16.18]	3	0.06	0.18
(16.18, 17.46]	8	0.16	0.34
(17.46, 18.74]	13	0.26	0.6
(18.74, 20.02]	11	0.22	0.82
(20.02, 21.3]	3	0.06	0.88
(21.3, 22.58]	3	0.06	0.94
(22.58, 23.86]	1	0.02	0.96
(23.86, 25.14]	2	0.04	1

从表中看出当把指标定为 17.46 千元时，约 65%的推销员经过努力才能完成销售指标.

2.（1）数据的散点图如下：



（2）用 y 表示身高，x 表示年龄，则数据的回归方程为

$$y=6.317x+71.984.$$

（3）在该例中，回归系数 6.317 表示孩子在一年中增加的高度.

（4）每年身高的增长数略.

3～16 岁的身高年均增长约为 6.323 cm.

（5）回归系数与每年平均增长的身高之间近似相等.

III 自我检测题

1. 请提出一个统计问题，并指出问题涉及的总体是什么，所涉及的变量是什么.

2. 为解决第 1 题中的统计问题，采用普查方法和随机抽样方法收集数据各有什么优缺点？

3. 为调查小区平均每户居民的月用水量，下面是 3 名学生设计的调查方案：

学生 A：我把这个用水量调查表放在互联网上，只要登录该网址的人就可以看到这张表，他们填表的信息可以很快地反馈到我的电脑中．这样，我就可以很快估计出小区平均每户居民的月用水量.

学生 B：我给我们居民小区的每一个住户发一个用水量调查表，只要一两天就可以统计出小区平均每户居民的月用水量.

学生 C：我在小区的电话号码本上随机地选出一定数量的电话号码，然后逐个给他们打电话，问一下他们的月用水量，然后就可以估计出小区平均每户居民的月用水量.

请问：上述 3 名学生设计的调查方案能够获得平均每户居民的月用水量吗？为什么？你有什么建议？

4. 为实时监控生产线上生产的电子管的质量，需要从生产出的产品中抽出约 $\frac{1}{20}$ 的产品进行检验，请设计一个合理的抽取样本的方法.

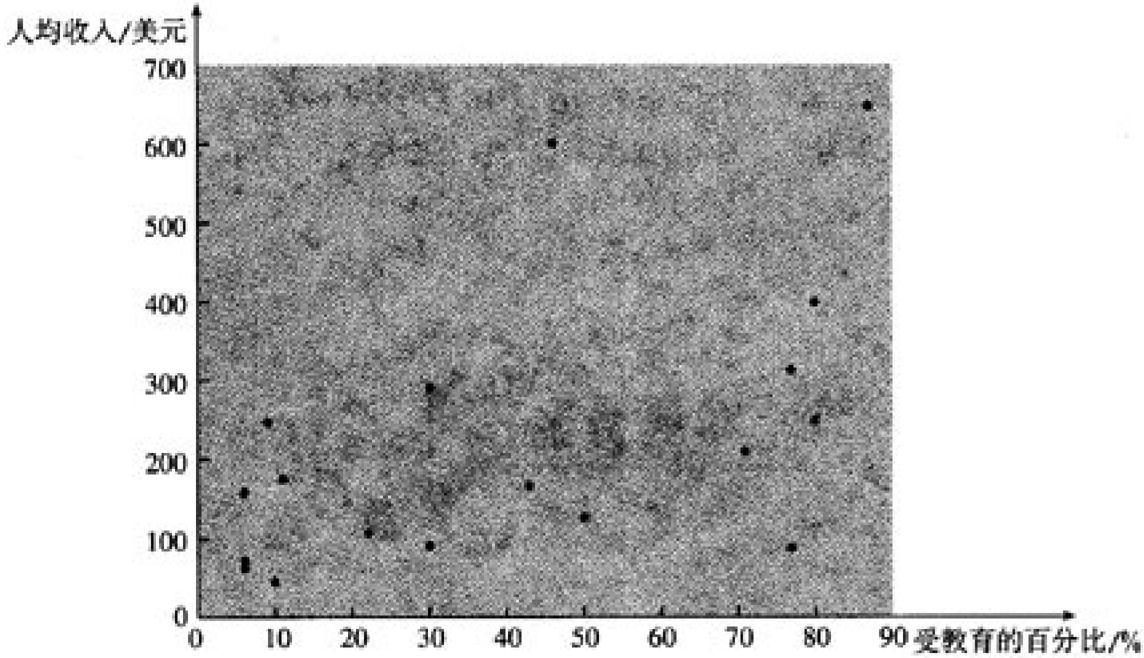
5. 从两个班中各随机抽取 10 名学生，他们的数学成绩如下：

甲班	76	74	82	96	66	76	78	72	52	68
乙班	86	84	62	76	78	92	82	74	88	85

通过作茎叶图，分析两个班学生的数学学习情况.

6. 中秋节前，假设食品质量监督部门通过抽样，对市场销售的不同品牌月饼的质量打分，分数的范围是 0～5，5 分为非常满意．经统计后，公布了质量调查结果．为什么你希望买具有高的平均数记分与低的标准差的月饼？

7. 下面的数据是关于世界20个地区受教育的人口的百分比与人均收入的散点图：



(1) 两个变量有什么样的相关关系？

(2) 利用散点图中的数据建立的回归方程为

$$y=3.193x+88.193,$$

若受教育的人口百分比相差10%，其人均收入相差多少？

参考答案

1. **说明** 这个问题没有标准答案，让学生发挥，主要训练学生从生活中提出统计问题的能力.

2. **说明** 这个问题是第1题的继续，要根据第1题的问题背景回答，主要考查学生对普查方法和随机抽样方法的特点和利弊的掌握情况.

3. 学生A的方法得到的样本不能够反映不上网的居民情况，是一种方便样本，所得的结果代表性差，不能很准确地获得平均每户居民的月用水量；学生B的方法实际上是普查，花费的人力物力要多一些，但是如果统计过程不出错，可以准确地得到平均每户居民的月用水量；在小区的每户居民都装有电话的情况下，同学C的方法是一种随机抽样方法，所得的样本具有代表性，可以比较准确地获得平均每户居民的月用水量.

在小区的每户居民都装有电话的情况下，建议用随机抽样的方法获取数据，即用学生C的方法，以节省人力物力，并且可以得到比较精确的结果.

4. 可以采用系统抽样的方法，具体操作如下：从1～20的整数中随机抽取一个数d，按生产线上的产品先后次序，将序号为$(d+20k)$ $(k\geqslant 0)$的产品取出作为样本.

5. 茎叶图为：

甲班		乙班
2	5	
6 8	6	2
2 4 6 6 8	7	4 6 8
2	8	2 4 5 6 8
6	9	2

从这个茎叶图中可以看出乙班的数学成绩更好一些.

6. 某品牌的月饼若具有高的平均分与低标准差的评分，表明该品牌的月饼质量稳定于高水平，令人放心.

7.（1）散点图中的样本点基本集中在一个条型区域中，因此两个变量呈线性相关关系.

（2）回归方程的自变量系数为 3.193，因此当人口的百分比相差 10%时，其人均收入相差

$$3.193\times10=31.93.$$

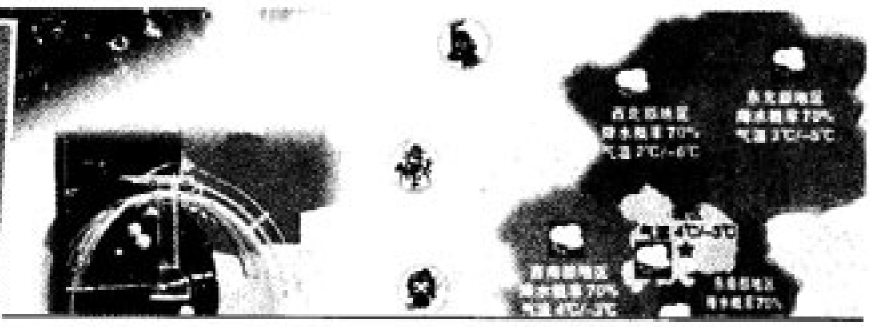
Ⅳ 拓展资源

参考书目

1. 冯世雍，施锡铨，《抽样调查——理论、方法与实践》，上海科学技术出版社，1996.

2. Gudmund R. Iversen，Mary Gergen，吴喜之等译，《统计学——基本概念和方法》，高等教育出版社，2000.

第三章 概率



I 总体设计

一、课程与学习目标

1. 课程目标

通过具体实例，帮助学生了解概率的某些基本性质，理解古典概型，初步体会几何概型；学会通过试验、计算器或计算机模拟估计简单随机事件发生的概率；通过阅读与思考等栏目，加深对随机现象的理解.

2. 学习目标

（1）在具体情境中，了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性，进一步了解概率的意义以及频率与概率的区别.

（2）通过实例，了解两个互斥事件的概率加法公式.

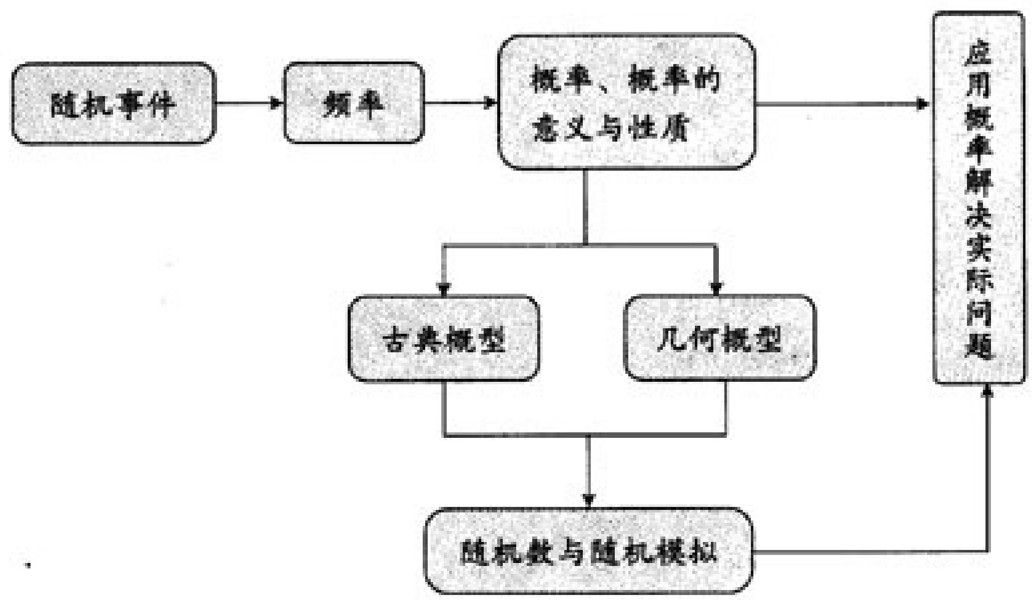
（3）通过实例，理解古典概型及其概率计算公式，会用列举法计算一些随机事件所含的基本事件数及事件发生的概率.

（4）了解随机数的意义，能运用模拟方法（包括计算器产生随机数来进行模拟）估计概率，初步体会几何概型的意义.

（5）通过阅读与思考栏目，了解人类认识随机现象的过程.

二、内容安排

1. 本章知识结构框图



2. 对内容安排的说明

本章内容的安排，重点考虑了如下几个方面.

（1）利用随机事件的频率给出概率的定义与性质.

（2）通过试验模拟等方法澄清日常生活中对概率的错误认识. 给出应用概率解决实际问题的几个例子，包括用概率检验游戏的公平性，概率在决策中的应用，概率在天气预报中的应用，等等.

（3）给出两个概率模型（古典概型和几何概型）下概率的计算公式.

（4）有两种产生随机数的方法，一种是由试验产生的随机数，另一种是利用计算器或计算机产生的（伪）随机数，通过模拟的方法估计随机事件发生的概率.

（5）通过阅读与思考等栏目加深对随机现象的理解，了解人类认识随机现象的过程是逐步深入的，了解概率这门学科在实际中有广泛的应用.

三、课时分配

全章共安排了 3 个小节，教学约需 8 课时，具体内容和课时分配如下（仅供参考）：

3.1　随机事件的概率	约 3 课时
3.2　古典概型	约 2 课时
3.3　几何概型	约 2 课时
小结	约 1 课时

Ⅱ 教科书分析

一般人都知道概率与游戏、博采等有关系，但本章章头图的设计意在体现概率知识在科学与工农业生产等领域的应用.

章头图的背景展示了海上的台风现象，还有天气预报图. 众所周知，天气变化对人的日常生活有很大影响，而台风对人类生活和生命财产的影响更大，准确地预报天气（台风）是十分重要的. 在预报过程中，概率知识起着非常重要的作用. 教师可以结合本章的阅读与思考栏目“天气变化的认识过程”或其他材料向学生介绍概率在天气预报中的作用，从而激发学生学习概率的兴趣.

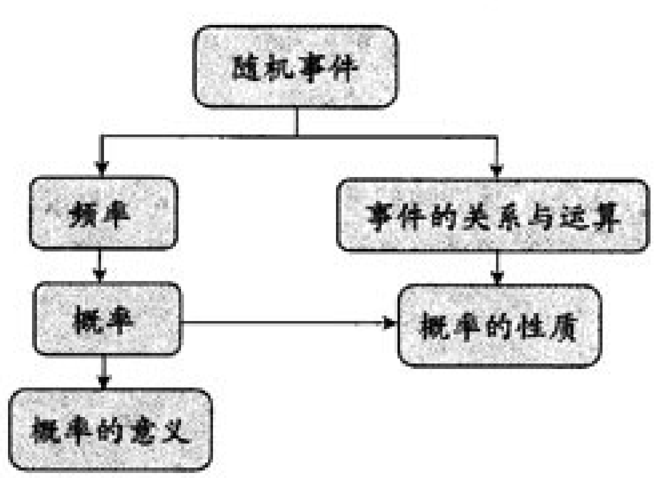
“36选7”是确定体育彩票中奖号码时所采用的一种常规方法，这是古典概型的一个典型例子；飞镖的命中率是几何概型的一个典型例子. 古典概型与几何概型都是本章的主要内容. 章头图选择了摇奖机和飞镖命中靶子的图案，意在使学生初步体会随机事件发生的不确定性和规律性.

通过章引言的学习，要使学生了解概率已经成为一个常用的词汇，如中奖概率、降水概率、投篮命中概率、射击命中概率等等. 那么概率的准确含义是什么？如何计算？计算概率有什么作用？这些问题都可以通过本章的学习，在理解了概率的含义、计算概率的方法及概率在实际中的应用等以后得到比较圆满的回答.

为了激发学生的学习兴趣，教学中应当多采用学生熟悉的、能够理解的实例. 教师可以使用章引言和章头图中的实例，也可以挖掘生活中的其他素材. 可以从两个方面考虑，一是学生感兴趣的问题，二是概率能解决的实际问题. 通过实例的分析，可以引出本章要研究的主要内容. 比如彩票的中奖率，可以从三个方面分析：(1) 彩票的中奖率的含义是什么？(2) 如何计算？(3) 对实际决策的意义是什么？

3.1 随机事件的概率

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：

1. 了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性；
2. 正确理解概率的意义.

难点：

1. 理解频率与概率的关系；
2. 对概率含义的正确理解.

三、编写意图与教学建议

由于在初中学生已接触过随机事件、不可能事件、必然事件的概念，所以教科书以“北京的天气变化情况”“水稻种子发芽后的生长情况”为例，简略叙述了客观世界中偶然与必然的内在联系，给出了随机事件、不可能事件、必然事件的概念. 这些概念与初中教科书略有不同. 例如，随机事件的概念，初中教科书中叙述为“在一定条件下，可能发生也可能不发生的事件称为随机事件”，本教科书则叙述为“在条件 S 下可能发生也可能不发生的事件，叫做相对于条件 S 的随机事件，简称随机事件”，这里条件 S 可以是一个条件，也可以是一组条件（可以理解为一个条件集），这样可以使表述更加清楚和简洁.

概率研究随机事件发生的可能性大小问题，这里既有随机性，又有随机性中表现出的规律性，这是学生理解的难点. 突破难点的最好办法是给学生亲自动手操作的机会，使学生在实践过程中形成对随机事件的随机性以及随机性中表现出的规律性的直接感知. 为此，教科书特别强调利用学生熟悉的典型实例（掷硬币的试验），通过学生亲自动手试验，来引导学生体会随机事件发生的随机性和随机性中的规律性. 通过试验，观察随机事件发生的频率，可以发现随着试验次数的增加，频率稳定在某个常数附近，然后再给出概率的定义. 在这个过程中，体现了试验、观察、归纳和总结的思想方法. 通过试验模拟等方法，可以澄清日常生活中对概率的错误认识，这也是加深学生理解概率的意义的机会. 另外，加强概率的实际应用，可以使学生体会概率的重要性. 因此，教学中一定要特别重视让学生进行操作这个环节.

随机事件可以看成集合，所以可以类比集合之间的关系与运算，得到事件之间的关系与运算. 教学中，可以引导学生在回顾集合的关系及其运算的有关知识的基础上，学习用图形表示事件之间的关系及其运算的思想和方法.

概率的性质可以类比频率的性质，并利用频率与概率的关系得到. 教学中，要尽量使用统计图和统计表展示频率的稳定性，这样既直观易懂，又可以与第二章《统计》的内容相呼应.

3.1.1 随机事件的概率

这部分的主要任务是：通过试验，体会随机事件发生的不确定性及其频率的稳定性，由此给出概率的统计定义. 教学中要强调：在试验前随机事件是否发生是不能确定的，但在大量的试验中随机事件出现的频率又是有规律的.

1. 回顾相关概念.

由于学生在初中已经学习过随机事件、不可能事件、必然事件的概念，所以在这节课开始前可以

先复习这几个概念，请学生举出现实生活中的随机事件、不可能事件、必然事件的实例，并让学生列出相应的条件 S.

2. 对掷硬币试验的几点说明.

(1) 要求学生实际动手操作而且必须认真做试验.

这个试验尽管学生过去可能做过，但由于它对理解随机事件的随机性和频率的稳定性有重要的意义，因此要让学生在明确掷硬币试验的重要性的前提下，认真做好试验（保证随机性），否则试验结果的误差就不仅仅是随机误差.

(2) 关于试验次数的说明.

理论上讲试验次数越多，频率越稳定在 0.5 附近. 但由于课堂上的时间有限，所以教科书设计了每个学生做 10 次掷硬币的试验，教师可以根据班级的人数或课时安排选择适当的试验次数.

(3) 关于分组的说明.

最好每组人数一样多，这样便于进行组与组之间的比较.

(4) 每一步都要强调试验结果（正面朝上的比例）之间的比较，其中既要进行相同试验次数之间的比较，又要进行不同试验次数之间的比较.

(5) 强调试验结果的随机性，和随着试验次数的增加，结果的稳定性.

(6) 要注意使用统计图和统计表展示频率的稳定性.

3. 掷硬币试验的教学步骤.

第一步：要求每个学生做 10 次掷硬币的试验，并对结果进行分析. 要求每个学生除了把试验结果填入表格外，画一张试验结果的条形图，横轴为试验结果，仅取两个值：1（正面）和 0（反面），纵轴为试验结果出现的频数或比例（例如，图 3-1 就表示某一个掷 10 次硬币的试验结果）. 引导学生通过比较数据和条形图，发现所得的结果不完全相同，从而说明结果的随机性. 这与物理试验的结果不同，一般相同条件的物理试验应该得到相同的结果.

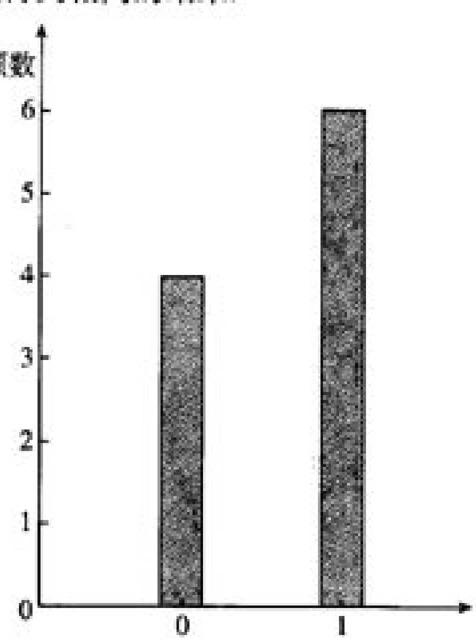


图 3-1

第二步：引导学生统计每组的试验结果（正面朝上的比例），并进行分析. 同样每组可以画一张与第一步类似的条形图，进行组间的比较，可以发现组与组之间的结果不完全相同，但组与组之间的差别会比学生与学生之间的差别小（分别计算两种情况的极差）. 每个学生把自己的结果与小组的结果比较，小组的结果一般会比多数学生的结果更接近 0.5.

这里采用比较正面朝上的比例，而不比较正面朝上的次数，原因是：①如果每组的人数不同，比较正面朝上的次数无意义；②为了把个人的结果与小组的结果比较，只能比较正面朝上的比例.

第三步：引导学生在每组试验结果的基础上统计全班的试验结果（正面朝上的比例）. 一般情况下，班级的结果应比多数小组的结果更接近 0.5，从而让学生体会随着试验次数的增加，频率会稳定在 0.5 附近.

第四步：为了比较学生的试验结果，把全班学生的数据收集起来，整理成如下的表格：

正面出现次数的频数表

正面朝上的次数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
频数											
频率											

填写第一行的方法如下：

假设全班有 50 名学生，如果没有学生掷 10 次硬币出现 0 次正面朝上，则正面朝上的次数是 0 的频数为 0；如果仅有 1 个学生掷 10 次硬币出现 0 次正面朝上，则正面朝上的次数是 0 的频数为 1；依次类推. 第一行全部数据的和是全班学生的总人数 50.

第二行的数据由第一行的相应数据除以全班总人数得到，它表示正面朝上次数的频率分布.

有了这张频数表，可以画出相应的正面朝上次数的条形图（例如，图 3-2 是某班 50 名学生每人各掷 10 次硬币后，按照上述方法得到的条形图）. 该条形图的横坐标是正面朝上的次数，纵坐标是频数或频率. 让学生仔细观察这张条形图，找出该图的特点，并与学生一起总结：

该图中间高，两边低，是比较对称的图形. 尽管在掷 10 次硬币前，不能确定试验的结果会有几次正面朝上，但我们可以推断正面朝上的次数为 4，5，6 的学生最多，说明出现这种情况的机会较大，而正面朝上的次数为 0，10 的学生很少，说明出现这种情况的机会较小，由此让学生体会试验结果的随机性与规律性之间的关系.

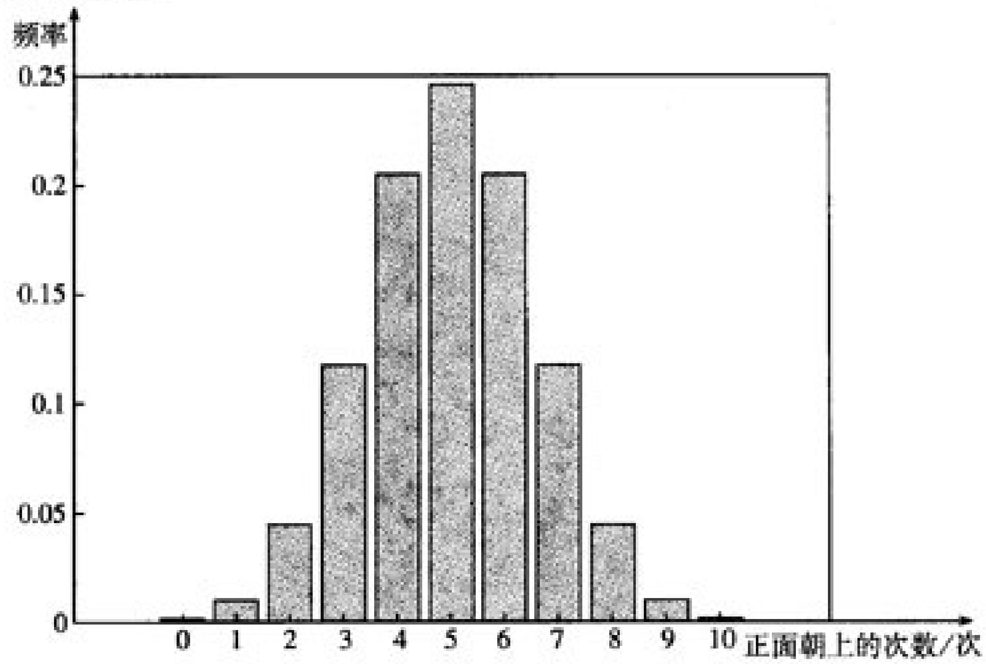


图 3-2

注意：(1) 这一步的目的，是希望学生应用第二章《统计》的知识，把试验的结果看成一个样本，同时用统计结果解释试验结果的随机性与规律性之间的关系.

(2) 这 11 个试验结果，每一个都是一个随机事件，在一次试验（每个学生的试验）中可能发生也可能不发生；另一方面，每个事件出现的频率又是有规律的.

第五步：启发和引导学生寻找出现正面朝上的规律，并让学生叙述出现正面朝上的规律性：随着试验次数的增加，正面朝上的频率稳定在 0.5 附近.

上述每个步骤的教学，除了学生动手实践外，还要注意引导学生用语言表达自己对试验过程与结果的看法.

重复上面的试验，全班的汇总结果可能会与上面的结果不同，原因仍是试验结果仅是一个随机事件，在一次试验中可能发生也可能不发生.

4. 概率定义教学的 3 个层次.

由于概率定义不好理解，因此教学中要特别注意做好铺垫. 一般来说，可以分为下面几个层次.

(1) 特殊的试验：通过大量的掷硬币试验结果，包括学生的试验结果、计算机模拟掷硬币的试验结果、历史上一些掷硬币的试验结果等，同时通过统计表和统计图等手段，使学生感受到随着试验次数的增加，正面朝上的频率在 0.5 附近摆动.

注意：不可以省略学生亲手做试验这一步，因为这个试验才是真正的重复试验，计算机模拟只能是掷硬币试验的一种近似，它是用数学方法来近似模拟这个试验的.

(2) 由特殊事件转到一般事件. 一般来说，随机事件 A 在每次试验中是否发生是不能预知的，但是在大量重复试验中，随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率会逐渐稳定在区间 $[0, 1]$ 中的某个常数上.

(3) 解释这个常数代表的意义：这个常数越接近 1，表明事件 A 发生的频率越大，频数就越多，也就是它发生的可能性越大；反过来，这个常数越接近 0，表明事件 A 发生的频率越小，频数就越少，也就是它发生的可能性越小. 所以可以用这个常数度量事件 A 发生的可能性的大小.

在学生经历上述过程后，再给出事件 A 的概率的定义.

5. 概率与频率的关系的讨论.

在引导学生对概率与频率之间关系进行讨论的基础上，可以帮助他们从以下几个方面进行总结.

(1) 频率是概率的近似值，随着试验次数的增加，频率会越来越接近概率. 在实际问题中，通常事件的概率未知，常用频率作为它的估计值. 比如一辆汽车在一年内出交通事故的概率就是未知的，保险公司收取汽车的保险费应与此概率有关，一般以当地交通部门的统计数据为依据，得到该事件发生的频率作为一年内出交通事故的概率的估计值.

(2) 频率本身是随机的，在试验前不能确定. 做同样次数的重复试验得到事件的频率会不同，比如全班每个人都做了 10 次掷硬币的试验，但得到正面朝上的频率可以是不同的.

(3) 概率是一个确定的数，是客观存在的，与每次试验无关. 比如，如果一个硬币是质地均匀的，则掷硬币出现正面朝上的概率就是 0.5，与做多少次试验无关.

6. 求随机事件概率的必要性.

知道事件的概率可以为人们做决策提供依据. 概率是用来度量事件发生可能性大小的量. 小概率事件很少发生，而大概率事件经常发生. 例如，如果天气预报报道“今天降水的概率是 10%”，可能绝大多数人出门都不会带雨具；而如果天气预报报道“今天降水的概率是 90%”，那么大多数人出门都会带雨具.

3.1.2 概率的意义

1. 概率的正确理解.

日常生活中，人们对概率常常有一些错误理解．我们知道，在概念的理解过程中，反例对于概念的辨析是特别有作用的，也就是通过剖析反例，可以促进学生对概念的正确理解．这一段就是通过澄清日常生活遇到的一些错误认识，达到正确理解概率的意义的目的．这里举了两个例子．

思考1：有人说，既然抛掷一枚硬币出现正面的概率为0.5，那么连续两次抛掷一枚质地均匀的硬币，一定是一次正面朝上，一次反面朝上，你认为这种想法正确吗？

教学中，可以先让学生自己发表意见，然后教师再引导学生归纳总结．可以从两个方面澄清这个错误认识：

（1）让学生通过做试验澄清这个错误认识；

（2）解释连续两次抛掷一枚质地均匀的硬币仅仅是做两次重复抛掷硬币的试验，试验的结果仍然是随机的，当然可以两次均出现正面朝上或两次均出现反面朝上．

思考2：如果某种彩票的中奖概率为$\frac{1}{1\ 000}$，那么买1 000张这种彩票一定能中奖吗？（假设该彩票有足够多的张数．）

与上面的处理类似，教学中同样可以在学生发表看法后再进行归纳总结．可以从两方面回答这个问题：

（1）假设该彩票有足够多的张数，可以近似看成有放回抽样，通过边空的模拟试验得到答案．把同样大小的9个白色乒乓球和一个黄色乒乓球放在一个袋中，每次摸出一球后再放回袋中，这样摸10次，观察是否一定至少有一次摸到黄球．每次摸出一球后再放回袋中，那么每次摸到黄球的概率都是0.1，但摸10次球，不一定能摸到黄球．

（2）解释每张彩票是否中奖是随机的，1 000张彩票有几张中奖当然也是随机的，但这种随机性中具有规律性．由于教科书还没有讲如何计算随机事件的概率，所以具体事件概率的计算不要求学生掌握．

注意：这个错误认识产生的原因是，有人把中奖概率$\frac{1}{1\ 000}$理解为共有1 000张彩票，其中有1张是中奖号码，然后看成不放回抽样，所以购买1 000张彩票，当然一定能中奖．而实际上彩票的总张数远远大于1 000．

2. 游戏的公平性.

在各类游戏中，如果每人获胜的概率相等，那么游戏就是公平的．这就是说，是否公平只要看获胜的概率是否相等．

（1）体育比赛中决定发球权的方法应该保证比赛双方先发球的概率相等，这样才是公平的．

（2）每个购买彩票的人中奖的概率应是相等的，这样对每个人才是公平的．

（3）假设全班共有5张电影票，如果分电影票的方法能够使得每人得到电影票的概率相等，那么分法才是公平的．

这部分内容仅仅是介绍概率的意义与应用，而不是要求学生去计算随机事件的概率，因为有些随机事件的概率比较难计算，而且教科书还没有讲如何计算随机事件的概率，所以这一段最后的“探究”，可以留给学生讨论，在学完3.2节后，再给出答案．

3. 决策中的概率思想.

本栏目的目的是利用概率解释统计中的极大似然方法的思想.

(1) 建议以讨论的方式学习这部分内容. 这里，首先要明确到底有多少种可能情况，然后在试验的结果出现后，再判断更可能是哪种情况. 例如，可以先举简单的例子：连续掷硬币 100 次，结果 100 次全部是正面朝上. 问学生：出现这样的结果，你会怎样想？如果有 51 次正面朝上，你又会怎样想？最后把两种可能情况告诉学生，一种是硬币质地均匀，一种是质地不均匀（反面比较重），请学生作出判断，每种结果更可能是在哪种情况下得到的.

又如，如果一个袋中或者有 99 个红球，1 个白球，或者有 99 个白球，1 个红球，事先不知道到底是哪种情况. 一个人从袋中随机摸出 1 球，结果发现是红球，你认为这个袋中是有 99 个红球，1 个白球，还是有 99 个白球，1 个红球呢？多数人的判断应是有 99 个红球，1 个白球，因为在这种情况下，摸到红球的概率是 0.99，否则摸到红球的概率是 0.01，0.99 远远大于 0.01.

(3) 教师在总结例子的基础上，可以概括极大似然法的思想：如果我们面临的是从多个可选答案中挑选正确答案的决策任务，“使得样本出现的可能性最大”可以作为决策的准则. 这种判断问题的方法称为极大似然法. 极大似然法是统计中最重要的统计思想方法之一.

4. 天气预报的概率解释.

(1) 天气预报是气象专家依据观测到的气象资料和专家们的实际经验，经过分析推断得到的. 它不是本书上定义的概率，而是主观概率的一种.

(2) 比如说降水概率，不可能做大量相同的重复试验，通过频率稳定性得到概率的值. 但是可以向学生解释这个值是专家依据以前的气象资料和近期的观测资料，再结合个人经验得到的值. 具有相同信息，并有类似经验的决策人都会做出大致相仿的判断，给出大体上差不多的概率值.

(3) 降水概率的大小只能说明降水可能性的大小，概率值越大只能表示在一次试验中发生的可能性越大. 在一次试验中“降水”这个事件是否发生仍然是随机的. 例如，如果天气预报说“明天降水的概率为 90%”，但是，尽管明天下雨的可能性很大，但由于“明天下雨”是随机事件，因此仍然有可能不下雨.

5. 试验与发现.

(1) 这部分的教学要把试验背景讲清楚，用图表的形式把每年的豌豆试验的可能结果表示出来，用统计表把第二年的数据展示出来，让学生比较试验结果的异同.

(2) 引导学生思考“3∶1”意味着什么？最后教师介绍根据多次的试验和研究，孟德尔发现了遗传定律. 教科书中举这个例子的目的，是让学生了解在科学发现中，试验、观察、猜想、找规律等方法是十分重要的，希望学生能养成良好的思考习惯，学习科学的研究方法，善于发现问题和解决问题.

(3) 与这个例子相仿的还有生物上有关色盲的问题.

6. 遗传机理中的统计规律.

(1) 这一段给出了孟德尔的遗传定律的具体解释. 教学中要注意提醒学生，每个豌豆均由两个特征因子组成，下一代是从父母辈中各随机地选取一个特征组成自己的两个特征，同时要注意显性因子与隐性因子的区别.

(2) 每个结果可以看成一个随机事件，实际上这是一个古典概型问题，完全类似于连续两次掷同一枚硬币，或同时掷两枚硬币的试验，可以把正面当成显性因子，反面当成隐性因子. 教学中可以引导学生进行比较，把遗传机理中的统计规律问题化归为同时掷两枚硬币的试验问题，这样可以使学生

体会掷硬币试验是一个具有一般意义的"模型"，可以帮助学生更好地理解其他问题.

（3）概率理论是统计学的基础，这里用概率的理论解释了试验结果的统计规律.

（4）可以让学生思考，按照遗传规律，第三年收获豌豆的比例会是多少？

3.1.3 概率的基本性质

本部分有两方面内容：事件的关系与运算、概率的基本性质.

1. 事件的关系与运算.

（1）在教学中教师可以通过掷骰子试验，让学生说出这个试验中的事件，并讨论它们之间的关系，从而给出事件的包含关系、相等关系. 然后把事件与集合对比，必然事件对应全集、随机事件对应子集，因为集合有交、并运算，由此引出并事件、交事件的概念. 进一步讨论当两个事件的交或并满足特殊条件时，定义两个事件互斥、互为对立事件的概念.

为什么要把事件与集合对比呢？试验可能出现的结果的全体可以看成集合，即看成全集，每个事件都可以看成全集的一个子集，把事件与集合对应起来，这样一来，新的概念能借用已有集合的知识，又可以利用 Venn 图直观形象地表示，既建立起了知识之间的联系，又有利于学生对新知识的理解和掌握，同时也使学生又一次体会了类比的方法.

（2）Venn 图的示意作用：类似集合的 Venn 图，这里用封闭图形表示事件，事件的关系与运算通过 Venn 图来形象直观地展示，这样有利于学生理解.

（3）教科书第 113 页的"探究"，要求学生找出事件与集合之间的一些对应关系. 运用集合论的观点来处理事件，可以给出下面的对比表：

符号	概率论	集合论
Ω	必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	试验的可能结果	Ω 中的元素
A	事件	Ω 的子集
$\overline{A}$	事件 A 的对立事件	集合 A 的补集
$A\subseteq B$	事件 B 包含事件 A	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 与集合 B 相等
$A\cup B$ 或 $A+B$	事件 A 与事件 B 的并	集合 A 与集合 B 的并
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 的交	集合 A 与集合 B 的交
$A-B$	事件 A 与事件 B 的差	集合 A 与集合 B 的差
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互斥	集合 A 与集合 B 的交为空集

注意：（1）两个事件的差不要求学生掌握.（2）对立事件的符号表示与集合论中补集的符号表示不同.

2. 概率的几个基本性质.

（1）教科书通过类比频率的性质，利用频率与概率的关系得到了概率的几条基本性质. 要注意这里的推导并不是严格的数学证明，仅仅是形式上的一种解释. 因为频率稳定在概率附近仅仅是一种描述，没有给出严格的定义，严格的定义要在大学的概率统计课程中才能给出.

(2) 教科书给出了必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0的结论. 但值得注意的是，概率等于1的事件不一定是必然事件，概率等于0的事件不一定是不可能事件. 这对学生来说可能会产生理解上的困难，教学中可以通过举例的方法帮助学生理解（几何概型的例子比较直观易懂）.

(3) 加法公式：这个性质是概率基本性质中最重要的，它是下一节推导古典概型计算概率公式的基础，特别要提醒学生注意概率的加法公式的条件：两个事件互斥. 对任意两个事件，一般有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

可以把这个公式与集合运算（求两个集合的并集中元素个数）类比，但不要求学生掌握这个公式.

(4) 对立事件：对立事件是特殊的互斥事件，除了它们的交是不可能事件外，它们的并必须是必然事件，由此推出若事件 A 与事件 B 是对立事件，则 $1=P(\Omega)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，从而$P(A)=1-P(B)$.

3. 例题的说明.

本例的目的是训练学生学会用概率的加法公式和对立事件的关系求随机事件的概率.

4. 阅读与思考栏目“天气变化的认识过程”的教学建议.

获得准确的天气预报，对人类的生产和日常生活都有十分重要的意义. 但是天气变化是十分复杂的事情，如何才能得到较准确的天气预报呢？这篇阅读材料介绍了人类认识天气变化的过程，大致经历了三个阶段：神化阶段、经验预报阶段和利用现代科学技术进行预报阶段. 由于影响天气变化的因素很多，对一些因素的认识还不完全清楚，因此目前的天气预报还不能达到非常理想的状态. 但随着人们认识的不断深入，天气预报会越来越准确.

通过这篇阅读材料，可以让学生认识到自然不是神秘的，是可以认识的，可以加深学生对随机现象的理解，使学生了解人类认识随机现象的过程以及统计与概率在其中所起的重要作用.

教学中可以先让学生阅读，然后组织讨论，让学生谈自己的理解，最后教师总结：人类认识随机现象的过程是逐步深入的，统计与概率起到了很重要的作用.

三、教学设计案例

3.1.2 概率的意义（1课时）

1. 教学任务分析

(1) 正确理解概率的含义.

在概率定义的基础上，从以下两个方面帮助学生正确理解概率的含义，澄清日常生活中遇到的一些错误认识：

① 试验：通过抛掷一枚质地均匀的硬币的试验，解释出现正面的概率为0.5的含义，纠正“连续两次抛掷一枚硬币，一定是一次正面朝上，一次反面朝上”的错误认识；通过从袋中摸球的试验，解释中奖概率为$\frac{1}{1\,000}$的含义，纠正“如果中奖概率为$\frac{1}{1\,000}$，那么买$\frac{1}{1\,000}$张彩票就一定能中奖”的错误认识.

② 随机性与规律性：解释每次试验结果的随机性，多次试验结果的规律性，进一步说明频率与概率之间的区别.

(2) 了解概率在实际问题中的应用.

① 概率与公平性的关系：利用概率解释游戏规则的公平性，判断实际生活中的一些现象是否合

理. 可以从正反两个方面举例让学生进行判断.

② 概率与决策的关系：介绍统计中极大似然思想的概率解释，并清楚它的概率基础：在一次试验中，概率大的事件发生的可能性大. 这种思想是“风险与决策”中经常使用的.

③ 概率与预报的关系：通过天气预报、地震预报、股票预报等实例，让学生了解概率在预报中的作用.

（3）进一步理解概率统计中随机性与规律性的关系.

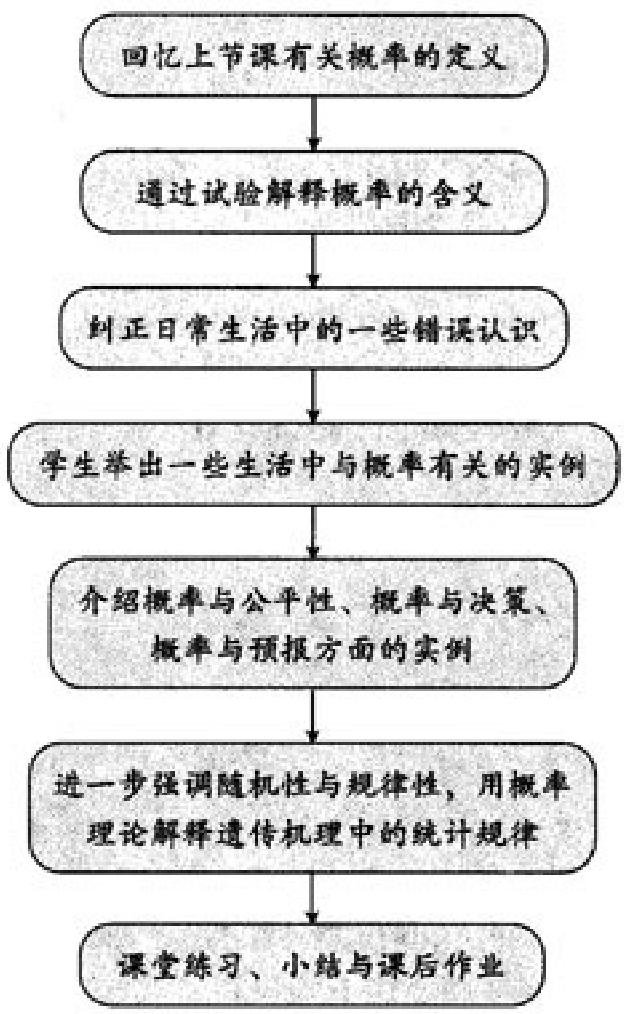
通过奥地利遗传学家孟德尔的豌豆试验数据，寻找其中的统计规律，并用概率理论解释这种统计规律. 利用著名的遗传定律，帮助学生进一步理解概率统计中随机性与规律性的关系、频率与概率的关系.

2. 教学重点与难点

重点：概率的正确理解及其在实际中的应用.

难点：概率与频率的联系与区别，随机试验结果的随机性与规律性的关系.

3. 教学基本流程



4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动
(1) 你能回忆一下随机事件发生的概率的定义吗？	复习上节课相关知识，加深对概率定义的印象.	师：提出问题，引导学生回忆概率的定义. 生：回忆、叙述概率的定义.
(2) 谁能说说掷一枚质地均匀的硬币出现正面的概率为$\frac{1}{2}$的含义？	分析学生的解释，引出概率含义的正确理解.	师：提出问题，引导学生讨论，讲出自己的想法，肯定正确的，指出错误的地方，用试验来验证. 生：思考、讨论、叙述自己的理解.
(3) 有人说，中奖率为$\frac{1}{1\,000}$的彩票，买$\frac{1}{1\,000}$张一定中奖，这种理解对吗？	进一步强化对概率的含义的正确理解.	师：提出问题，在学生回答后，给出买 1 000 张中奖的概率 0.632 3. 生：通过与问题 2 的比较，正确地理解概率的含义.
(4) 你能举出生活中一些与概率有关的例子吗？	让学生了解生活中有很多与概率有关的问题，突出概率应用性.	师：提出问题，引导学生寻找生活中与概率有关的例子. 生：举例.
(5) 随机事件发生的频率与概率的区别与联系是什么？	使学生掌握概率与频率的区别与联系.	师：帮助学生回忆上节课的试验，引导学生观察，归纳和总结. 最后归纳总结概率与频率的联系与区别的书面文字. 生：尝试归纳、概括频率与概率的区别和联系，并发表自己的意见.
(6) 你有没有注意到在乒乓球、排球等体育比赛中，如何确定由哪一方先发球？你觉得那些方法对比赛双方公平吗？	使学生体会概率在游戏的公平性方面的应用.	师：提出问题，引导学生回忆生活中的一些实例，可自己编一些不公平的规则和公平的规则混杂，让学生利用所学概率知识判断，引发学生思考和讨论. 生：回忆、思考、判断、讨论、解释.
(7) 在一次试验中，连续 10 次投掷一枚骰子，结果出现的都是 1 点，你认为这个骰子的质地均匀吗？为什么？	让学生体会极大似然法的统计思想.	师：提出问题，引导学生讨论，给出统计推断，说明推断可能犯错误，并引导学生用所学知识解释极大似然法这种统计思想的合理性. 生：思考、讨论.
(8) 同学们经常听天气预报，哪位同学能解释本地降水概率为 70%的含义？	使学生理解降水概率的确切含义.	师：提出问题，解释天气预报是如何得到的，给出降水概率的确切含义. 生：思考问题，了解天气预报的含义.
(9) 阅读教科书 110 页，你能说说孟德尔在创立遗传学的过程中，统计与概率所起的主要作用吗？	突出概率的应用性及其与其他学科的联系	师：提出问题，引导学生阅读，了解孟德尔的成就. 特别要注意引导学生体会统计与概率在科学研究中的重要作用. 生：阅读相关内容，了解概率应用的广泛性.

续表

问　题	问题设计意图	师生活动
（10）小结：你对概率与频率的区别与联系有哪些认识？你认为应当怎样理解概率的意义？	归纳整理本节知识，提高对概率意义的认识水平.	教师提出思考任务，引导学生思考、总结，并对学生的回答进行评价、补充.
（11）课后作业： 1. 练习　第1，3题； 2. 习题3.1A组第4题.		

5. 几点说明

1. 频率是概率的近似值，但是两者有很大的差别：频率本身是一个随机的量，而概率是一个确定的数. 教学时应充分结合学生的已有知识经验，通过丰富的实例来强化这一点.

2. 天气预报中所提的概率是借助于经验的、无法进行重复试验的主观概率，与我们通常所说的统计概率有所不同，不要过分强调这部分.

3. 用随机事件发生的频率只能得到概率的估计值，课上一定要强调“估计”二字.

四、习题解答

练习（第105页）

1. （1）试验可能出现的结果有3个，两个均为正面、一个正面一个反面、两个均为反面.

（2）通过与其他同学的结果汇总，可以发现出现一个正面一个反面的次数最多，大约在50次左右，两个均为正面的次数和两个均为反面的次数在25次左右. 由此可以估计出现一个正面一个反面的概率为0.50，出现两个均为正面的概率和两个均为反面的概率均为0.25.

说明　本题要求学生在家里完成自己的试验，教师在课堂上把结果汇总. 这里要注意有的同学可能得到的结果是4个，正正、正反、反正、反反，在这种情况下试验的两个硬币是有区别的.

2. 略.

说明　本题要求学生在家里完成，教师在课堂上把结果汇总，在讲概率的基本性质时可以作为例子.

3. （1）例如：北京四月飞雪；某人花两元钱买福利彩票，中了特等奖；同时抛10枚硬币，10枚都正面朝上.

（2）例如：在王府井大街问路时，碰到会说中文的人；去烤鸭店吃饭的顾客点烤鸭；在1～1 000的自然数中任选一个数，选到的数大于1.

练习（第111页）

1. **说明**　例如，计算机键盘上各键位置的安排，公交线路及其各站点的安排，抽奖活动中各奖项的安排等，其中都用到了概率. 学生可能举出各种各样的例子，关键是引导他们正确分析例子中蕴涵的概率思想.

2. 通过掷硬币或抽签的方法，决定谁先发球，这两种方法都是公平的. 而猜拳的方法不太公平，因为出拳有时间差，个人反应也不一样.

3. 这种说法是错误的. 因为掷骰子一次得到2是一个随机事件，在一次试验中它可能发生也可能不发

生．掷6次骰子就是做6次试验，每次试验的结果都是随机的，可能出现2也可能不出现2，所以6次试验中有可能一次2都不出现，也可能出现1次，2次，…，6次．

练习（第114页）

1. 0.7.
2. 0.615.
3. 0.4.
4. （1）$\frac{1}{7}$；（2）$\frac{4}{7}$；（3）$\frac{2}{7}$.

习题3.1（第116页）

A组

1. 略.
2. （1）0；（2）0.2；（3）1.
3. （1）$\frac{43}{645}\approx 0.067$；（2）$\frac{90}{645}\approx 0.140$；（3）$1-\frac{70}{645}\approx 0.891$.

说明 当不知道王小慧的任何信息时，只能利用这门课以往的数据；如果知道王小慧的信息，可以考虑用条件概率（这是选修2-3的内容）.

4. 0.13.
5. **说明** 本题是想通过试验的方法，得到这种摸球游戏对先摸者和后摸者是公平的结论．最好把全班同学的结果汇总，根据两个事件出现的频率比较接近，猜测在第一种情况下摸到红球的概率为$\frac{1}{10}$，在第二种情况下也为$\frac{1}{10}$．第4次摸到红球的频率与第1次摸到红球的频率应该相差不远，因为不论哪种情况，第4次和第1次摸到红球的概率都是$\frac{1}{10}$.

B组

1. 略.

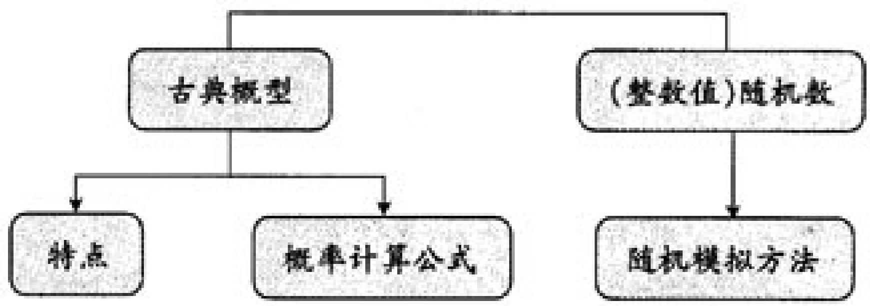
说明 本题是为了让学生根据实际数据作出一些推断．一般我们假定每个人的生日在12个月中哪一个月是等可能的，这个假定是否成立，引导学生通过收集的数据作出初步的推断.

2. 略.

说明 本题为学生学习阅读与思考栏目“概率与密码”作铺垫，教师还可以将本题与计算机键盘的设计问题联系起来．一般情况下，按频率大小排序的结论为$E>A>O>I>U$.

3.2 古典概型

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：理解古典概型及其概率计算公式.

难点：设计和运用模拟方法近似计算概率.

三、编写意图与教学建议

教科书通过“掷一枚质地均匀的硬币的试验”和“掷一枚质地均匀的骰子的试验”给出基本事件的概念，通过分析这两个试验总结出古典概型的两个特点及概率的计算公式. 教科书中选用的例题具有一定的实际背景，而且学生也比较熟悉，容易激发学生的学习欲望. 每道例题的计算量都不大，用列举法都可以数出基本事件的总个数. 每道题在计算出随机事件的概率后，都配了相应的“探究”或“思考”，提出问题，引导学生进一步学习，以开拓学生的思路. 教学中不要把重点放在“如何计算”上，要让学生通过实例理解古典概型的两个特征：试验结果的有限性和每一个试验结果出现的等可能性. 同时要让学生初步学会把一些实际问题转化为古典概型. 在计算出随机事件的概率后，最好解释一下它在实际中的意义及其应用.

在随机数的产生与随机模拟的教学中，要充分使用信息技术，让学生亲自动手产生随机数，进行模拟活动，有条件的学校可以让学生用一种统计软件统计模拟的结果，画出随试验次数增加的频率的折线图等统计图，没有条件的学校必须要求学生会用计算器产生随机数进行简单的模拟试验，并统计试验结果.

3.2.1 古典概型

1. 学习古典概型的意义.

古典概型是一种特殊的数学模型. 由于它在概率论发展初期曾是主要的研究对象，许多概率的最初结果也是由它得到的，所以称它为古典概型. 古典概型在概率论中占有相当重要的地位，是学习概率的必不可少的内容，其意义在于：

（1）有利于理解概率的概念. 当研究这种概型时，频率的稳定性容易得到验证，频率的稳定值与理论上算出的概率值的一致性容易得到验证，从而概率值的存在性易于被学生理解.

（2）有利于计算事件的概率．在古典概型范围内研究问题，避免了进行大量重复试验，通过分析基本事件的个数就可以计算随机事件的概率，而且得到的概率是精确值．

（3）能解释生活中的一些问题，可以激发学生的学习兴趣．比如中奖概率的问题，游戏的公平性问题，储蓄卡密码的设计问题，质检中检测出次品的概率问题，掷骰子的问题，等等．

2. 古典概型的两个特征．

教学中应让学生理解古典概型的两个特征：

（1）试验的所有可能出现的基本事件只有有限个；

（2）每个基本事件出现的可能性相等．

一个模型只有满足这两个特征时，才能用下面计算随机事件的概率公式

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件个数}}{\text{总的基本事件个数}}.$$

这里，条件特征（1）保证了公式中的分母是有限数，特征（2）保证了能够由统计事件 A 包含的基本事件个数占总的基本事件个数的比例，计算事件 A 的概率．教学中，可以引导学生推导古典概型计算概率的公式，从中体会（2）的必要性．实际上，当（2）不满足时，利用古典概型计算概率的公式，会导致错误的结果，如本节的例 3.

在推导公式时，教科书采用了从特殊到一般的思路，先利用掷硬币和掷骰子的试验推导出上面的公式（这里使用了概率的加法公式和每个基本事件出现的可能性相等这一性质），然后再推广到一般的古典概型．

由于排列组合的内容已放在选修 2-3 中，所以在古典概型的例题和习题中，仅限于能用列举法列出全部基本事件的问题．

3. 例题的教学建议．

（1）例 1 的说明．

本例的目的是训练学生用列举法表示一个随机试验的全部基本事件．列举基本事件时要做到既不重复，也不遗漏．为此，应当按照一定的规律列出全部的基本事件．另外，在列举的过程中，可以与二元子集作比较．

（2）例 2 的说明．

① 讨论这个问题什么情况下可以看成古典概型，这是本题的关键．如果考生掌握了考察的内容，选择了唯一正确的答案，那么这种情况不属于古典概型，不满足古典概型的第 2 个条件——等可能性；如果考生掌握了部分考察的内容，用排除法选择了一个答案，这也不满足古典概型的第 2 个条件；只有在假定考生不会做，随机地选择了一个答案的情况下，才可以化为古典概型．

② 边空中的问题："假设有 20 道单选题，如果有一个考生答对了 17 道题，他是随机选择的可能性大，还是他掌握了一定的知识的可能性大"，可以运用极大似然法的思想解决．假设他每道题都是随机选择答案的，可以用模拟的方法估计他答对 17 道题以上的概率，可以发现这个概率是很小的；如果掌握了一定的知识，绝大多数题他是会做的，那么他答对 17 道题以上的概率会比较大，所以他应该掌握了一定的知识．

③ 讨论单选题与多选题的区别．在多选题中，基本事件为 15 个：(A)，(B)，(C)，(D)，(A，B)，(A，C)，(A，D)，(B，C)，(B，D)，(C，D)，(A，B，C)，(A，B，D)，(A，C，D)，(B，C，D)，(A，B，C，D)．假定考生不会做，在他随机地选择任何答案是等可能的情况下，他答对的概率为 $\frac{1}{15}\approx 0.066\,7$，比单选题答对的概率 0.25 小得多．所以多选题更难猜对．

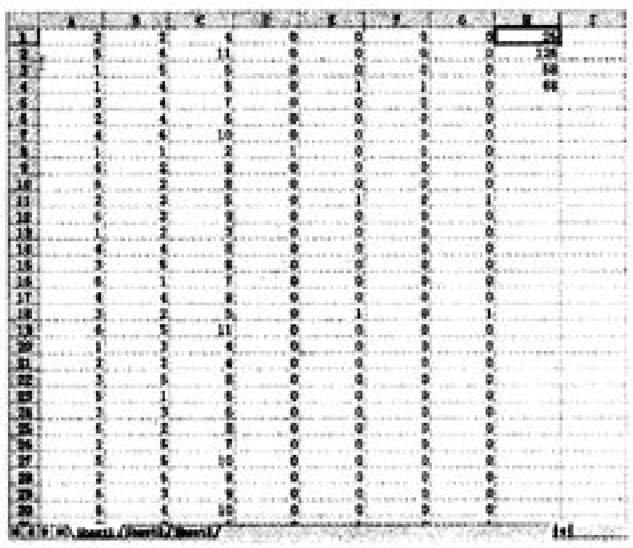
教学中可以先让学生思考，分析出全部的基本事件，然后，讨论是否可以用古典概型求概率的公式.

（3）例3的说明.

① 通过此题的教学要使学生体会到，不要一看到试验包含的基本事件是有限个就用古典概型的公式求概率，特别要验证“每个基本事件出现是等可能的”这个条件，否则计算出的概率将是错误的.

② 教学方式可以采用先提出问题让学生做，学生给出的答案可能会有两种，然后再引导学生分析原因，发现解答中存在的问题. 为了加深理解，教师可以引导学生验证该试验是否满足古典概型的两个条件，发现问题出在每个基本事件不是等可能的. 同时可以让学生再回顾一下古典概型的概率公式的推导过程.

③ 可以通过模拟和分析两种方式验证每个基本事件的等可能性，但模拟的方式可能要花比较多的时间，所以应事先编好程序. 下面是用 Excel 软件模拟的结果，试验次数为 1 000 次.



其中：

A，B两列是模拟掷骰子出现的点数；

C列是两次掷骰子的点数和；

D列表示如果两次均出现点数1，则D为1，否则D为0；

E列表示如果两次出现点数之和为5，则E为1，否则E为0；

F列表示如果两次出现点数为（1，4）或（4，1），则F为1，否则F为0；

G列表示如果两次出现点数为（2，3）或（3，2），则G为1，否则G为0；

H1统计在1 000次同时掷两个骰子的试验中出现（1，1）的个数；

H2统计出现点数之和为5的个数；

H3统计出现（1，4）或（4，1）的个数；

H4统计出现（2，3）或（3，2）的个数.

多做几次试验可以发现，出现（1，4）或（4，1）的个数大约是出现（1，1）的个数的两倍.

使用分析方法，可以列出下表，这样学生就比较容易理解每个基本事件是否具有等可能性.

	1	2	3	4	5	6
1	1+1=2	1+2=3	1+3=4	1+4=5	1+5=6	1+6=7
2	2+1=3	2+2=4	2+3=5	2+4=6	2+5=7	2+6=8
3	3+1=4	3+2=5	3+3=6	3+4=7	3+5=8	3+6=9
4	4+1=5	4+2=6	4+3=7	4+4=8	4+5=9	4+6=10
5	5+1=6	5+2=7	5+3=8	5+4=9	5+5=10	5+6=11
6	6+1=7	6+2=8	6+3=9	6+4=10	6+5=11	6+6=12

(4) 例 4 的说明.

选此题的目的是让学生理解什么情况下可以把问题看成古典概型，什么情况下不可以，了解概率在实际中的应用. 本例所涉及的具体计算是非常简单的.

① 利用概率解释实际问题：让学生体会密码的位数不能太少. 位数越少，选择就越少，也就越不安全.

② 让学生理解为什么自动取款机不能无限制地让用户试密码，一般取款机仅允许试三次. 无限制地试下去，一定能取到钱，这样就太不安全了，由此体会生活中处处有科学.

③ 记住自己的密码，又不能让别人猜出自己的密码是很重要的. 我们经常看到人们在银行忘记密码的情形. 如果自己的密码没有一定的规律，忘记密码后去试密码，试对的概率是比较小的.

(5) 例 5 的说明.

① 使学生理解检测出不合格产品的概率与每箱饮料中不合格的听数有关.

② 探究栏目的答案：

检测出不合格产品的概率与检验的听数有关. 随着检测听数的增加，检测出不合格产品的概率增大. 下列表格可以使学生一目了然.

检测听数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
概率	0.167	0.318	0.455	0.576	0.682	0.773	0.848	0.909	0.955	0.985	1	1

“为什么质检人员一般都采用抽查的方法而不采用逐个检查的方法”，这里可以与统计中抽样的必要性相联系.

3.2.2 （整数值）随机数的产生

产生随机数的方法有两种：

(1) 由试验产生的随机数：例如我们要产生 1～25 之间的随机整数，我们把 25 个大小形状等均相同的小球分别标上 1，2，3，…，24，25，放入一个袋中，把它们充分搅拌，然后从中摸出一个球，这个球上的数就是随机数. 一般当需要的随机数个数不是太多时，可以用这种方法产生随机数. 如果需要随机数的量很大，这种方法就不是很方便，因为速度太慢.

(2) 用计算器或计算机产生随机数：由于计算机或计算器产生的随机数是根据确定的算法产生的，具有周期性（周期很长），具有类似随机数的性质，但并不是真正的随机数，称为伪随机数. 在随机模拟中，往往需要大量的随机数，这时会选择用计算机产生随机数.

1. 用计算器产生取整数值的随机数的说明.

这部分内容是新增加的内容，是随机模拟中最简单、易操作的部分，所以要求每个学生会操作. 具体教学时，教师可以在课堂上带着学生用计算器操作一遍，然后让学生模拟掷硬币的试验或掷骰子的试验，并统计试验的结果.

根据试验结果，教师可以设计一些与上一章统计部分相联系的问题，通过知识的相互联系，可以帮助学生更好地理解概率的意义和一些统计思想. 例如：

① 每个学生模拟掷一个硬币的试验 20 次，统计出现正面的频数与频率，并可用频率估计概率. 在此基础上进一步提出问题：这个估计的精度如何？误差大吗？

② 如果全班有 50 人，每人得到一个频率，那么有 50 个观测数据，计算这 50 个数据的平均数和标准差，并根据统计中的平均数和标准差的含义和计算的具体数值，解释这个模拟结果. 通过这个过程，可以使学生进一步理解频率是概率的估计值，以及平均数和标准差的含义等.

不同的计算器产生随机数的操作步骤可能不同，教科书中仅是以一种计算器为例给出产生随机数

的步骤．教学中，可以让学生自己看计算器的说明书，按说明书的提示进行操作．

2. 用计算机中的 Excel 软件产生取整数值的随机数，用随机模拟的方法估计事件的概率的说明．

很多软件都能产生随机数，教科书中以 Excel 软件为例，主要考虑到这个软件比较普遍，多数教师对它比较熟悉．教师在讲授这部分内容之前应该熟悉一下 Excel 软件，特别是产生随机数的函数、画统计图的功能及对统计数据结果的处理功能．

有条件的学校，应当给学生提供上机的机会，使学生动手操作，学会用计算机产生随机数，进而进行模拟活动，让他们经历用计算机产生数据，整理数据，分析数据，画统计图的全过程，使学生相信统计结果的真实性、随机性及规律性．

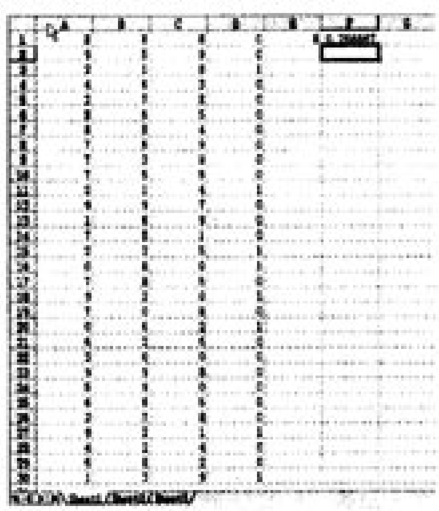
用随机模拟的方法模拟随机现象称为统计试验．这里必须明确随机模拟方法得到的结果只能是概率的近似值或估计值，每次试验得到的结果可能是不同的．

3. 例 6 的说明．

本例的目的是让学生体会如何用模拟的方法估计概率．解决这样的问题有 3 个步骤：

① 设计概率模型．如何设计概率模型是这道例题的关键，这就是数学建模的第一步．首先，要模拟每一天下雨的概率为 40%，有很多种方法．例如：我们利用计算器或计算机可以产生 0～9 之间（取整数值）的随机数，我们用 0，1，2，3 表示下雨，4，5，6，7，8，9 表示不下雨（注这里与教科书不同，用哪 4 个数表示下雨，只要事先约定即可，意义是一样的），这样可以体现下雨的概率是 40%．我们的问题是模拟三天的下雨情况，所以连续产生的三个随机数为一组，作为三天的模拟结果．

② 进行模拟试验．可以用计算器或计算机进行模拟试验．下面是用 Excel 软件模拟的结果：



其中 A，B，C 三列是模拟三天的试验结果，例如第一行前三列为 888，表示三天均不下雨．

③ 统计试验的结果．D，E，F 列为统计结果．其中 D 列表示如果三天中恰有两天下雨，则 D 为 1，否则 D 为 0，其公式为

“=IF(OR(AND(A1<4, B1<4, C1>3), AND (A1<4, B1>3, C1<4), AND(A1>3, B1<4, C1<4)), 1, 0)”.

E1 表示 30 天中恰有两天下雨的天数，其公式为“=SUM (D$1 : D$30)”．F1 表示 30 天中恰有两天下雨的频率，其公式为“=E1/30”．

事实上，在学习二项分布后，此题可用二项分布得到这三天中恰有两天下雨的概率：

$$C_3^2\times0.4^2\times(1-0.4)=0.288.$$

四、习题解答

练习（第 123 页）

1. $\frac{1}{10}$.

2. $\frac{1}{7}$.

3. $\frac{1}{6}$.

练习（第 126 页）

1. $\frac{3}{8}$，$\frac{3}{8}$.

说明 本题希望学生利用计算机或计算器作模拟试验.

2. (1) $\frac{1}{13}$；　(2) $\frac{12}{13}$；　(3) $\frac{1}{4}$；　(4) $\frac{3}{13}$；　(5) 0；(6) $\frac{2}{13}$；　(7) $\frac{1}{2}$；　(8) 1.

说明 模拟的方法有两种：

(1) 把 1～52 个自然数分别与每张牌对应，再用计算机做模拟试验.

(2) 让计算机分两次产生两个随机数，第一次产生 1～4 的随机数，代表 4 个花色；第二次产生 1～13 的随机数，代表牌号.

3. (1) 不可能事件，概率为 0.

(2) 随机事件，概率为$\frac{4}{9}$.

(3) 必然事件，概率为 1.

(4) 让计算机产生 1～9 的随机数，1～4 代表白球，5～9 代表黑球.

说明 与 3.1 节的内容相联系，加深学生对随机事件及其概率的理解.

4. (1) $\frac{1}{6}$.

(2) 略.

(3) 应该相差不大，但会有差异. 存在差异的主要原因是随机事件在每次试验中是否发生是随机的，但在 200 次试验中，该事件发生的次数又是有规律的，所以一般情况下所得的频率与概率相差不大.

习题 3.2（第 127 页）

A 组

1. 游戏 1：取红球与取白球的概率都为$\frac{1}{2}$，因此规则是公平的.

游戏 2：取两球同色的概率为$\frac{1}{3}$，异色的概率为$\frac{2}{3}$，因此规则是不公平的.

游戏 3：取两球同色的概率为$\frac{1}{2}$，异色的概率为$\frac{1}{2}$，因此规则是公平的.

2. (1) $\frac{3}{5}$；　(2) $\frac{3}{10}$；　(3) $\frac{9}{10}$.

说明 (3) 先计算该事件的对立事件发生的概率会比较简单.

3. (1) 0.52；　　(2) 0.18.

4. (1) $\frac{2}{5}$；　　(2) $\frac{1}{10}$；　　(3) $\frac{7}{10}$；　　(4) $\frac{3}{10}$；　　(5) $\frac{1}{5}$.

5. (1) $\frac{1}{5}$；　　(2) $\frac{9}{50}$.

6. (1) $\frac{28}{65}$；　　(2) $\frac{24}{65}$；　　(3) $\frac{44}{91}$.

B组

1. (1) $\frac{1}{5}$；　　(2) $\frac{18}{125}$.

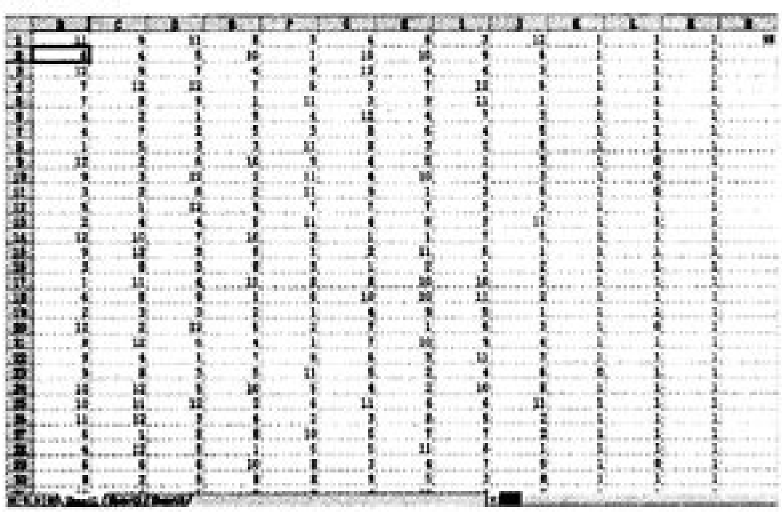
2. 每一位可以是 0～9 这 10 个数字中的一个，所以

(1) $\frac{1}{100}$；　　(2) $\frac{81}{100}$；　　(3) $1-\frac{10}{100}=\frac{9}{10}$.

3. 具体步骤如下：

① 建立概率模型．首先要模拟每个人的出生月份，可用 1，2，…，11，12 表示月份，用产生取整数值的随机数的办法，随机产生 1～12 之间的随机数．由于模拟的对象是一个有 10 个人的集体，故把连续产生的 10 个随机数作为一组模拟结果，可模拟产生 100 组这样的结果．

② 进行模拟试验．可用计算器或计算机进行模拟试验．如使用 Excel 软件，可参看教科书 125 页的步骤，下图是模拟的结果：



其中，A，B，C，D，E，F，G，H，I，J 的每一行表示对一个 10 人集体的模拟结果．这样的试验一共做了 100 次，所以共有 100 行，表示随机抽取了 100 个集体．

③ 统计试验的结果．K，L，M，N 列表示统计结果．例如，第一行前十列中至少有两个数相同，表示这个集体中至少有两个人的生日在同一个月．本题的难点是统计每一行前十列中至少有两个数相同的个数．由于需要判断的条件太多，所以用 K，L，M 三列分三次完成统计．

其中 K 列的公式为

"=IF(OR(A1=B1，A1=C1，A1=D1，A1=E1，A1=F1，A1=G1，A1=H1，A1=I1，A1=J1，B1=C1，B1=D1，B1=E1，B1=F1，B1=G1，B1=H1，B1=I1，B1=J1，C1=D1，C1=E1，C1=F1，C1=G1，C1=H1，C1=I1，C1=J1，D1=E1，D1=F1，D1=G1，D1=H1，D1=I1，D1=J1)，1，0)"，

L 列的公式为

"=IF(OR(E1=F1，E1=G1，E1=H1，E1=I1，E1=J1，F1=G1，F1=H1，F1=I1，F1=J1，G1=H1，G1=I1，G1=J1，H1=I1，H1=J1，I1=J1)，1，0)"，

M 列的公式为

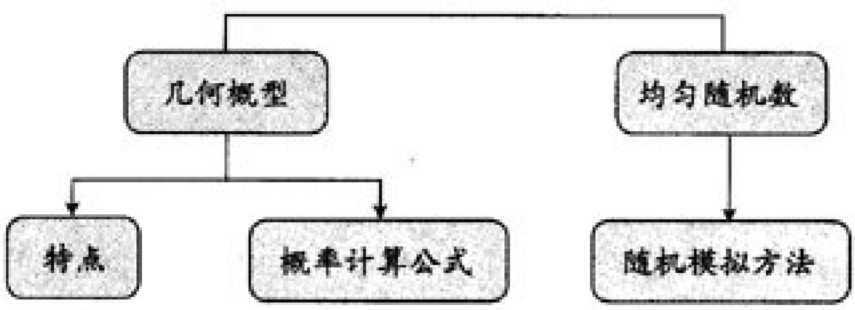
"=IF(OR(K1=1, L1=1), 1, 0)".

M列的值为1表示该行所代表的10人集体中至少有两个人的生日在同一个月. N1表示100个10人集体中至少有两个人的生日在同一个月的个数，其公式为"=SUM(M$1: M$100)". N1除以100所得的结果0.98，就是用模拟方法计算10人集体中至少有两个人的生日在同一个月的概率的估计值. 可以看出，这个估计值很接近1.

说明 本题用列举法计算概率是很困难的，但可以用随机模拟的方法求得概率近似解，使学生理解模拟方法的优点，并充分发挥信息技术的优势. 可以让学生分别模拟有4，5，6个人的集体的情况，体会概率值的变化.

3.3 几何概型

一、本节知识结构



二、教学重点与难点

重点：体会随机模拟中的统计思想：用样本估计总体.

难点：把求未知量的问题转化为几何概型求概率的问题.

三、编写意图与教学建议

这部分是新增加的内容. 介绍几何概型主要是为了更广泛地满足随机模拟的需要，但是对几何概型的要求仅限于初步体会几何概型的意义，所以教科书中选的例题都是比较简单的. 随机模拟部分是本节的重点内容. 几何概型是另一类等可能概型，它与古典概型的区别在于试验的结果不是有限个，利用几何概型可以很容易举出概率为0的事件不是不可能事件的例子，概率为1的事件不是必然事件的例子.

利用古典概型产生的随机数是取整数值的随机数，是离散型随机变量的一个样本；利用几何概型产生的随机数是取值在一个区间的随机数，是连续型随机变量的一个样本. 比如[0，1]区间上的均匀随机数，是服从[0，1]区间上均匀分布的随机变量的一个样本. 随机模拟中的统计思想是用频率估计概率.

本节的教学需要一些实物模型为教具，如教科书中的转盘模型、例3中的随机撒豆子的模型等. 教学中应当注意让学生实际动手操作，以使学生相信模拟结果的真实性，然后再通过计算机或计算器产生均匀随机数进行模拟试验，得到模拟的结果. 在这个过程中，要让学生体会结果的随机性与规律

性，体会随着试验次数的增加，结果的精度会越来越高.

随机数的产生与随机模拟的教学中要充分使用信息技术，让学生亲自动手产生随机数，进行模拟活动，有条件的学校可以让学生用一种统计软件统计模拟的结果.

3.3.1 几何概型

1. 几何概型的特点.

几何概型也是一种概率模型，它与古典概型的区别是试验的可能结果不是有限个. 它的特点是在一个区域内均匀分布，所以随机事件的概率大小与随机事件所在区域的形状、位置无关，只与该区域的大小有关. 如果随机事件所在区域是一个单点，由于单点的长度、面积、体积均为 0，则它出现的概率为 0，但它不是不可能事件；如果一个随机事件所在区域是全部区域扣除一个单点，则它出现的概率为 1，但它不是必然事件.

2. 关于教科书中两个转盘游戏的说明.

（1）教学中可以事先做好模型，在课堂上让学生做游戏，观察甲在哪种情况下获胜的概率大.

（2）可以用提问的方式，让学生猜两个游戏中甲获胜的概率各是多少？通过分析这两个游戏，得到几何概型计算随机事件概率的公式.

3. 例 1 的说明.

本例的教学可以分解为如下步骤：

（1）把问题抽象成几何概型. 如假设在 0～60 分钟之间任何一点，打开收音机是等可能的，而在哪个时间段打开收音机的概率只与该时间段的长度有关，与该时间段的位置无关，这符合几何概型的条件，可以看成几何概型.

（2）找到等待的时间不多于 10 分钟这个事件 A 所在的区域. 如打开收音机的时刻恰好位于 [50，60] 时间段内，则等待的时间不多于 10 分钟.

（3）根据几何概型计算概率的公式计算该事件的概率.

（4）用模拟的方法得到概率的估计值. 做一个带指针的转盘，把它 6 等分，最好与钟表的格子对应，可以用固定转盘不动，旋转指针的方法，或固定指针不动，旋转转盘的方法，得到打开收音机的时间，做 20 次试验可以得到该事件概率的估计值.

4. 均匀分布是一种常用的连续型分布，它来源于几何概型. 由于没有讲随机变量的定义，教科书中均匀分布的定义仅是描述性的，不是严格的数学定义. 要求学生体会如果 X 落到 [0，1] 区间内任何一点是等可能的，则称 X 为 [0，1] 区间上的均匀随机数.

3.3.2 均匀随机数的产生

1. 关于用计算器产生均匀随机数操作方法的说明.

产生均匀随机数的操作方法基本上与 3.2.2 中产生整数值随机数的方法相同，只是这里产生的是取值在 [0，1] 区间上的均匀随机数（实数）. 有了前面的基础，学生很容易掌握操作步骤，教学中只要在课堂上带着学生操作一遍即可.

同样地，不同的计算器产生均匀随机数的操作步骤可能不同，教科书中仅是以一种计算器为例给出产生随机数的步骤，可以让学生自己查看计算器的说明书，按说明书操作.

值得注意的是，由计算器不能直接产生 $[a, b]$ 区间上的均匀随机数，只能通过线性变换得到：如果 X 是 [0，1] 区间上的均匀随机数，则 $(a+(b-a)X)$ 就是 $[a, b]$ 区间上的均匀随机数.

2. 用 Excel 软件产生均匀随机数的教学.

有条件的学校，应当给学生提供上机的机会，使学生能学会用计算机产生均匀随机数，并进行模拟活动，掌握用计算机处理数据，整理数据，画统计图的方法，使学生更好地体会统计思想.

Excel 软件产生［0，1］区间上均匀随机数的函数为“rand( )”.

3. 用模拟的方法近似计算某事件的概率.

(1) 试验模拟的方法：在例 2 中可以做两个转盘模型，进行模拟试验，并统计试验结果；

(2) 计算机模拟的方法：用 Excel 软件产生［0，1］区间上均匀随机数进行模拟. 可参考下面的操作步骤.

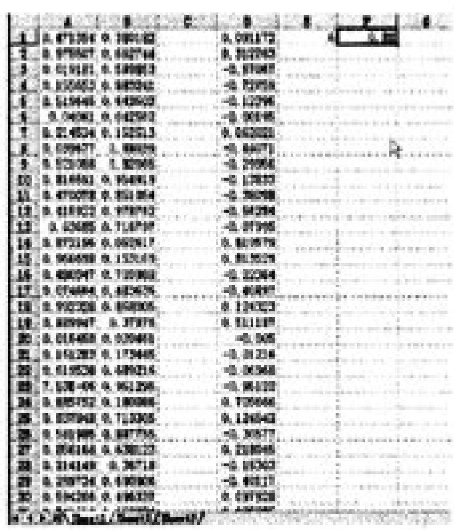
① 选定 A1，键入函数“＝rand( )”.

② 选定 A1，按“ctrl＋C”，选定 A2～A50，B1～B50，按“ctrl＋V”. 此时，A1～A50，B1～B50 均为［0，1］区间上的均匀随机数. 用 A 列的数加 7 表示父亲离开家的时间，B 列的数加 6.5 表示送报人送到报纸的时间. 如果 A＋7＞B＋6.5，即 A－B＞－0.5，则表示父亲在离开家前能得到报纸.

③ 选定 D1，键入“＝A1－B1”；再选定 D1，按“ctrl＋C”，选定 D2～D50，按“ctrl＋V”.

④ 选定 E1，键入函数“＝FREQUENCY(D1：D50，－0.5)”，E1 表示统计 D 列中小于或等于－0.5的数的个数，即父亲在离开家前不能得到报纸的频数.

⑤ 选定 F1，键入“＝(50－E1)/50”. F1 表示统计 50 次试验中，父亲在离开家前能得到报纸的频率. 如图：



多次重复试验得到的频率可能与上面的结果不同，引导学生从中体会频率的随机性与相对稳定性.

4. 用模拟的方法估计圆周率的值.

(1) 抽象成几何概型. 在例 3 中，随机撒一把豆子，假设每个豆子落到正方形内任何一点是等可能，则落到某个区域的豆子数只与区域的大小有关，而与区域的位置和形状无关，这符合几何概型的条件，可以看成几何概型.

(2) 利用几何概型求概率的公式，得到

$$\text{豆子落到圆内的概率}=\frac{\text{圆的面积}}{\text{正方形的面积}}.$$

(3) 通过模拟的方法，得到豆子落到圆内的频率. 分别用两种方法——试验模拟（真的撒一把豆子）和计算机模拟. 计算机模拟的方法可参考下面的操作步骤.

① 选定 A1，键入“＝(rand ( )－0.5) ＊2”.

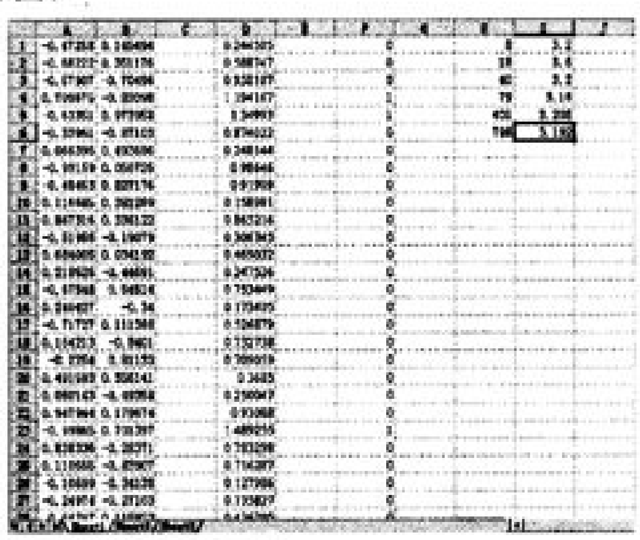
② 选定 A1，按“ctrl+C”. 选定 A2～A1 000，B1～B1 000，按“ctrl+V”. 此时，A1～A1 000，B1～B1 000 均为［－1，1］区间上的均匀随机数.

③ 选定 D1，键入“=power(A1，2) +power(B1，2)”；再选定 D1，按“ctrl+C”；选定 D2～D1 000，按“ctrl+V”，则 D 列表示 A^2+B^2.

④选定 F1，键入“=IF(D1>1，1，0)”；再选定 F1，按“ctrl+C”；选定 F2～F1 000，按“ctrl+V”，则如果 D 列中 $A^2+B^2>1$，F 列中的值为 1，否则 F 列中的值为 0.

⑤选定 H1，键入“=FREQUENCY(F1：F10，0.5)”，表示 F1～F10 中小于或等于 0.5 的个数，即前 10 次试验中落到圆内的豆子数；类似地，选定 H2，键入“=FREQUENCY(F1：F20，0.5)”，表示前 20 次试验中落到圆内的豆子数；选定 H3，键入“=FREQUENCY(F1：F50，0.5)”，表示前 50 次试验中落到圆内的豆子数；选定 H4，键入“=FREQUENCY(F1：F100，0.5)”，表示前 100 次试验中落到圆内的豆子数；选定 H5，键入“=FREQUENCY(F1：F500，0.5)”，表示前 500 次试验中落到圆内的豆子数；选定 H6，键入“=FREQUENCY(F1：F1 000，0.5)”，表示前 1 000 次试验中落到圆内的豆子数.

⑥ 选定 I1，键入“=H1＊4/10”，表示根据前 10 次试验得到圆周率 π 的估计值；选定 I2，键入“=H2＊4/20”，则 I2 为根据前 20 次试验得到圆周率 π 的估计值；类似操作，可得 I3 为根据前 50 次试验得到圆周率 π 的估计值，I4 为根据前 100 次试验得到圆周率 π 的估计值，I5 为根据前 500 次试验得到圆周率 π 的估计值，I6 为根据前 1 000 次试验得到圆周率 π 的估计值. 可以看到 1 000 次试验得到 π 的估计值的精度并不高. 如图：



5. 用模拟的方法近似计算不规则图形的面积.

根据几何概型计算概率的公式，概率等于面积之比，如果概率用频率近似，在不规则图形外套上一个规则图形，则不规则图形的面积近似等于规则图形的面积乘以频率. 频率可以通过模拟的方法得到，从而得到了不规则图形面积的近似值. 例 4 就是用这个方法计算不规则图形面积的. 在阴影外画出矩形（$x=-1$，$x=1$，$y=0$ 和 $y=1$ 所围成的部分），则这个不规则图形的面积=频率×2.

例 4 具体操作如下：

① 选定 A1，键入“=(rand ( )－0.5) ＊2”；再选定 A1，按“ctrl+C”；选定 A2～A1 000，按“ctrl+V”；此时，A1～A1 000 均为［－1，1］区间上的均匀随机数；

② 选定 B1，键入“rand( )”；再选定 B1，按“ctrl+C”；选定 B2～B1 000，按“ctrl+V”；此时，B1～B1 000 均为［0，1］区间上的均匀随机数；

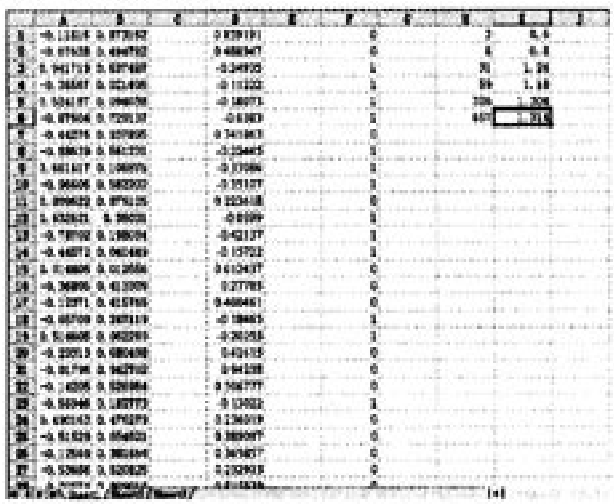
③ 选定 D1，键入“=B1－power(A1，2)”；再选定 D1，按“ctrl+C”；选定 D2～D1 000，按“ctrl+V”，则 D 列表示 $B-A^2$；

④ 选定 F1，键入“=IF(D1>0，0，1)”，再选定 F1，按“ctrl+C”；选定 F2～F1 000，按“ctrl

+V"，则如果 D 列中元素大于 0，则 F 列中的值为 0，否则 F 列中的值为 1；

⑤ 选定 H1，键入“=FREQUENCY(F1：F10，0.5)”，表示 F1～F10 中小于等于 0.5 的个数，即前 10 次试验中落到阴影部分的频数；类似地，选定 H2，键入“=FREQUENCY(F1：F20，0.5)”，表示前 20 次试验中落到阴影部分的频数；选定 H3，键入“=FREQUENCY(F1：F50，0.5)”，表示前 50 次试验中落到阴影部分的频数；选定 H4，键入“=FREQUENCY(F1：F100，0.5)”，表示前 100 次试验中落到阴影部分的频数；选定 H5，键入“=FREQUENCY(F1：F500，0.5)”，表示前 500 次试验中落到阴影部分的频数；选定 H6，键入“=FREQUENCY(F1：F1000，0.5)”，表示前 1 000 次试验中落到阴影部分的频数.

⑥ 选定 I1，键入“=H1 * 2/10”，表示根据前 10 次试验得到阴影部分面积的估计值；选定 I2，键入“=H2 * 2/20”，则 I2 表示根据前 20 次试验得到阴影部分面积的估计值；类似操作，可得 I3 表示根据前 50 次试验得到阴影部分面积的估计值，I4 表示根据前 100 次试验得到阴影部分面积的估计值，I5 表示根据前 500 次试验得到阴影部分面积的估计值，I6 表示根据前 1 000 次试验得到阴影部分面积的估计值. 每次试验的结果一般是不同的.



6. 阅读与思考栏目“概率与密码”的教学建议.

通过阅读与思考的形式使学生了解概率在实际中的应用. 在破译密码与反破译密码中都应用了概率的知识，通过讲解，可以激发学生学习概率知识的兴趣. 教科书中的字母出现频数表是统计《鲁宾逊漂流记》（英文版）一文得到的.

四、教学设计案例

3.3.2 均匀随机数的产生（1 课时）

1. 教学任务分析

1. 通过本节课的学习让学生知道如何利用计算器或计算机 Excel 软件产生均匀随机数，并会利用随机模拟方法估计未知量.

2. 这是概率必修章节的最后一课，前面已经学过了（整数值）随机数的产生和用蒙特卡罗模拟方法估计概率值. 本节的主要思路是对照前面学过的知识让学生自主思考、设计估计未知量的方案.

3. 介绍 [0，1] 区间均匀随机数的产生方法，通过例 2 的讲解，让学生理解随机模拟的基本思想是用频率近似概率，频率由试验获得，这里的概率由几何概型得到.

4. 随机模拟方法估计未知量. 例 3 是圆周率值的估计，例 4 则是不规则平面图形面积的估计.

2. 教学重点与难点

重点：均匀随机数的产生，设计模型并运用随机模拟方法估计未知量.

难点：如何把未知量的估计问题转化为随机模拟问题.

3. 教学基本流程

[0,1] 区间均匀随机数的产生

↓

回忆几何概型的定义，以及相关的古典概型中的随机模拟方法

↓

学生自主设计随机模拟方案估计概率

↓

随机模拟方法的基本思想:频率近似概率

↓

用随机模拟方法求未知量的估计值

↓

课堂练习、小结与课后作业

4. 教学情境设计

问　题	问题设计意图	师生活动
（1）谁能叙述一下几何概型的有关知识吗？	复习上节课相关知识.	师：提出问题，引导学生回忆、对学生活动进行评价. 生：回忆、概括.
（2）与古典概型相比，是否还可以用一个区间内的随机数来进行随机模拟呢？	使学生从两种概型的区别中认识随机实数的产生方法.	师：引导学生观察、区别、阅读书本中的相关知识，评价学生活动. 生：通过思考认识到随机实数产生方法在估计几何概型事件概率时的必要性.
（3）对于例 2 的事件 A，你能设计一个随机模拟的方法来求它的概率吗？	应用随机模拟方法估计几何概型中随机事件的概率值.	教师引导学生独立解答例 2，充分调动学生自主设计随机模拟方法，并组织学生展示自己的解答过程，要求学生说明解答的依据. 教师总结.
（4）对于例 3，你能设计一个随机模拟的方法来估计圆的面积吗？	随机模拟方法估计圆的面积，进而估计圆周率 π 的值.	师：引导学生依据几何概型需满足的条件设计随机模拟方法，估计圆的面积. 生：回忆几何概型的定义，设计方案.

续表

问　题	问题设计意图	师生活动
（5）对于例 4，你能设计一个随机模拟的方法来估计图 3.3-4 中阴影部分的面积吗？	随机模拟方法估计不规则图形的面积.	师：画一些曲线围成的图形，让学生设计方案求面积的估计值. 生：思考问题，给出方案.
（6）小结：如何利用几何概型事件和随机模拟方法来求一些未知量？3 个例题分别说明了什么？	总结本节课所学的知识.	师：提出问题，引导学生思考归纳概括. 生：思考、整理、表述归纳概括的结果.
（7）课后作业：习题 3.3　B组.		

5. 几点说明

1. 本节课是概率必修章节的收尾篇，应该充分调动学生的积极性，以学生之间的互动为主，教师引导为辅.

2. 例 2 与例 3 各有侧重，在例 3 中可以适当引入一些学生熟悉的图形，如椭圆的面积的估计.

3. 要注意引导学生体会使用随机模拟方法的概率基础是：频率是概率的近似，借助这种近似建立方程，求得某些未知量的估计值.

4. 用随机模拟得到的计算结果是不精确的，只是估计值，一定要强调“估计”二字.

五、习题解答

练习（第 134 页）

1. 0.1.

2. （1）$\frac{1}{\pi}$；　（2）$\frac{3}{8}$.

3. 如果射到靶子上任何一点是等可能的，那么大约有 100 个镖落在红色区域.

说明　在实际投镖中，命中率可能不同，这里既有技术方面的因素，又有随机因素的影响，所以在投掷飞镖、射击或射箭比赛中不会以一枪或一箭定输赢，而是取多次成绩的总和，这就是为了减少随机因素的影响.

习题 3.3（第 137 页）

A 组

1. （1）$\frac{4}{9}$；　（2）$\frac{1}{3}$；　（3）$\frac{2}{9}$；　（4）$\frac{2}{3}$；　（5）$\frac{5}{9}$.

2. （1）$\frac{1}{26}$；　（2）$\frac{1}{2}$；　（3）$\frac{3}{26}$；　（4）$\frac{3}{26}$；　（5）$\frac{1}{2}$；　（6）$\frac{3}{13}$.

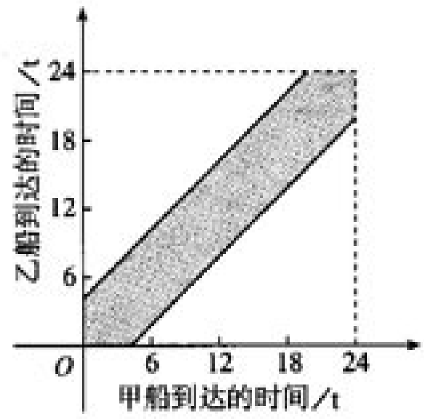
说明　（4）是指落在 6，23，9 三个相邻区域的情况，而不是编号为 6，7，8，9 四个区域.

3. （1）$\frac{2}{5}$；　（2）$\frac{1}{15}$；　（3）$\frac{3}{5}$.

说明　本题假设在任何时间到达路口是等可能的.

B 组

设甲到达的时间为 x，乙到达的时间为 y，则 $0<x$，$y<24$. 若至少一艘船在停靠泊位时必须等待，则 $0<y-x<6$ 或 $0<x-y<6$，必须等待的概率为：$1-\frac{18^2}{24^2}=1-\frac{9}{16}=\frac{7}{16}$.



复习参考题（第 140 页）解答

A 组

1. (1) 一般会比较接近；　　(2) 一般会比较接近.

   摸到红球的频率与摸到白球的频率和为 1，因为这是一个必然事件.

2. (1) 0.548；　(2) 0.186；　(3) 0.266.

3. (1) $\frac{3}{8}$；　(2) $\frac{1}{4}$.

4. (1) 0.144；　(2) 0.16；　(3) 0.07；　(4) 0.204.

5. 分别计算两球均为白球的概率、均为红球的概率、均为黑球的概率，然后相加，得

$$\frac{3\times10}{25\times25}+\frac{7\times6}{25\times25}+\frac{15\times9}{25\times25}=\frac{207}{625}=0.331\ 2.$$

6. $\frac{8}{9}$.

说明 利用对立事件计算会比较简单.

B 组

1. 第一步，先计算出现正面次数与反面次数相等的概率

$$\frac{C_{10}^{5}}{2^{10}}=\frac{252}{1\ 024}=\frac{63}{256}.$$

第二步，利用对称性，即出现正面的次数多于反面次数的概率与出现反面的次数多于正面次数的概率是相等的，所以出现正面的次数多于反面次数的概率为

$$\left(1-\frac{63}{256}\right)\div2=\frac{193}{512}.$$

2. (1) 仅考虑第 2 张牌，它等可能地为 52 张牌中任何一张，有两种情况，是 A 或不是 A，利用古典概型计算概率的公式，第 2 张牌是 A 的概率为

$$\frac{4}{52}=\frac{1}{13}.$$

(2) 考虑前两张牌，第 1 张牌不是 A，而第 2 张牌是 A 的概率为

$$\frac{50\times4}{54\times53}=\frac{16}{221}.$$

3. 总的基本事件数为 $C_8^4=70$.

(1) 取出的鞋都不成对，实际上相当于分别在每双鞋中取出一只，包含基本事件的个数为 $2\times2\times2\times2=16$. 所以取出的鞋都不成对的概率为

$$\frac{16}{70}=\frac{8}{35}.$$

(2) 取出的鞋恰好有两只是成对的，这一对可以是 4 双中的任何一双，然后从剩下的三双中去掉一双，再从余下的两双中各取一只，包含基本事件个数为 $4\times3\times2\times2=48$. 所以取出的鞋恰好有两只是成对的概率为

$$\frac{48}{70}=\frac{24}{35}.$$

(3) 取出的鞋至少有两只是成对的与取出的鞋都不成对互为对立事件，所以取出的鞋至少有两只是成对的概率为

$$1-\frac{8}{35}=\frac{27}{35}.$$

(4) 取出的鞋全部成对的概率为

$$1-P(\text{都不成对})-P(\text{恰好有两只是成对的})=1-\frac{8}{35}-\frac{24}{35}=\frac{3}{35}.$$

说明 此题属于古典概型的一类“配对问题”，由于这里的数比较小，可以用列举法.

4. 参考 136 页例 4.

III 自我检测题

一、选择题（每小题只有一个正确选项）

1. 下列叙述随机事件的频率与概率的关系中哪个是正确的（　　）

(A) 频率就是概率.

(B) 频率是客观存在的，与试验次数无关.

(C) 随着试验次数的增加，频率一般会越来越接近概率.

(D) 概率是随机的，在试验前不能确定.

2. 设 A，B 是两个任意事件，下面哪一个关系是正确的（　　）

(A) $A+B=A$.　　(B) $AB\supset A$.　　(C) $A+AB=A$.　　(D) $\overline{A}B\subset A$.

3. 从一批产品中取出三件产品，设 $A=$ “三件产品全不是次品”，$B=$ “三件产品全是次品”，$C=$ “三件产品不全是次品”，则下列结论哪个是正确的（　　）

(A) A 与 C 互斥.　(B) B 与 C 互斥.　(C) 任何两个均互斥.　(D) 任何两个均不互斥.

4. 某人忘记了电话号码的最后一个数字，随意拨号，则拨号不超过三次而接通电话的概率为(　　)

(A) $\frac{9}{10}$.　　(B) $\frac{3}{10}$.　　(C) $\frac{1}{8}$.　　(D) $\frac{1}{10}$.

5. 同时向上抛 100 个铜板，结果落地时 100 个铜板朝上的面都相同，你认为这 100 个铜板更可能是下面哪种情况（　　）

(A) 这 100 个铜板两面是一样的.

(B) 这 100 个铜板两面是不同的.

(C) 这 100 个铜板中有 50 个两面是一样的，另外 50 个两面是不相同的.

(D) 这 100 个铜板中有 20 个两面是一样的，另外 80 个两面是不相同的.

6. 设 C，D 是两个随机事件，下面哪个叙述是正确的（　　）

(A) $C\cap D$ 与 $C\cup D$ 互斥.　　(B) $C\cap D$ 与 $C\cap\overline{D}$ 互斥.

(C) $C\cap D$ 与 $C\cup\overline{D}$ 互斥.　　(D) $C\cap\overline{D}$ 与 $C\cup D$ 互斥.

二、填空题

7. 4 位顾客将各自的帽子随意放在衣帽架上，然后，每人随意取走一顶帽子，则 4 人拿的都是自己的帽子的概率为______，恰有 3 人拿到自己的帽子的概率为______，恰有 1 人拿到自己的帽子的概率为______，4 人拿的都不是自己的帽子的概率为______.

8. 将一个骰子连续掷两次，依次记录所得点数，则两次骰子的点数相同的概率为______，两次之差的绝对值为 1 的概率为______，两数之积小于等于 12 的概率为______.

9. 同时掷两个骰子，两个骰子的点数和可能是 2，3，4，…，11，12 中的一个，事件 $A=\{2,5,7\}$，事件 $B=\{2,4,6,8,10,12\}$，那么 $A\cup B=\{\_\_\_\_\}$，$A\cap\overline{B}=\{\_\_\_\_\}$.

10. 在区间（0，1）中随机地取出两个数，则两数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率是______.

三、解答题

11. 甲盒中有红、黑、白皮笔记本各 3 本，乙盒中有黄、黑、白皮笔记本各 2 本. 从两盒中各取一本.

(1) 求取出的两本是不同颜色的概率；

(2) 请设计一种随机模拟的方法，来近似计算（1）中取出的两本是不同颜色的概率.

参考答案：

1. C；　2. C；　3. B；　4. B；　5. A；　6. B.

7. $\frac{1}{24}$（或 0.042），0，$\frac{1}{3}$（或 0.333），$\frac{3}{8}$（或 0.375）.

8. $\frac{1}{6}$（或 0.167），$\frac{5}{18}$（或 0.278），$\frac{23}{36}$（或 0.639）.

9. $A\cup B=\{2,4,5,6,7,8,10,12\}$，$A\cap\overline{B}=\{5,7\}$.

10. $\frac{17}{25}$（或 0.68）.

11. (1) 从甲盒中取出 1 本共有 9 种取法，从乙盒中取出 1 本共有 6 种取法，所以，共有 $9\times6=54$ 种取法.

设 $A=$“取出的两本是相同颜色的笔记本”，$B=$“取出的两本是不同颜色的笔记本”，则事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{6+6}{54}=\frac{2}{9}=0.222$，由事件 A 与事件 B 是对立事件，得事件 B 的概率为 $P(B)=1-P(A)=\frac{7}{9}=0.778$.

(2) 第一步，利用抓阄法或计算机（计算器）产生随机数的方法产生取值为 1，2，3 中的随机数. 用“1”表示取到红色笔记本，“2”表示取到黑色笔记本，“3”表示取到白色笔记本.

第二步，利用抓阄法或计算机（计算器）产生随机数的方法产生取值为 2，3，4 中的随机数. 用“4”表示取到黄色笔记本，“2”表示取到黑色笔记本，“3”表示取到白色笔记本.

第三步，重复上面的两步100次．统计前两步取到不同数的试验次数 n，则 $\frac{n}{100}$ 就是取出的两本是不同颜色概率的近似值．

Ⅳ 拓展资源

1．产生随机事件的原因．

这是因为所给的条件常常不能完全决定事态的发展．例如，在抛掷一枚硬币的试验中，所给的条件 S 仅是“向上抛掷一枚硬币”，硬币落地后哪一面朝上不仅由这一条件确定，还受硬币离手瞬间的速度、角度、空气的气流等一些微小的不确定因素的影响，所以不能完全确定试验的结果．

根据已观测的气象资料确定某地区明天是否下雨，所给的条件 S 是“至今为止的气象观测资料数据”，包括湿度、温度、气压、风向、降雨分布等观测数据，但是这些条件还不足以决定明天某地区是否下雨．还受许多不确定因素的影响，所以明天下雨成为随机事件．

2．概率发展的几个阶段——通过发展过程引出概率的公理化定义．

（1）概率的古典定义（通过古典概型定义）

在试验的基本事件只有有限个、每个基本事件出现是等可能的情况下，设试验的基本事件总数为 n，对事件有利的基本事件数为 m，则用数 $\frac{m}{n}$ 来表达事件 A 出现可能性大小，并称之为事件 A 的概率．

（2）概率的统计定义（即教科书中的定义）

（3）主观概率的定义（无法重复试验时）

概率作为相信程度的度量，一次事件的概率叫主观概率，完全由个人决定．

古典概率和几何概率都要求某种等可能性的假定，概率的频率解释要假定大量的重复试验是可能的．但在某种情况下，上述两种假定都不可行．比如，投资者在买进某种股票时，投资有增值和减值两种可能．这里不具备任何等可能性的特征，而且显然也无法在相同的条件下重复进行试验．在这种情形下，投资者对于随机事件发生的可能性大小仍然可以做出判断，这时依据的是他们所了解到的各种与随机事件有关的“信息”．这种通过人的判断给事件赋的概率值就称作事件的主观概率．

由于主观概率在赋值时包含个人判断的因素．所以对于同一事件，不同的人有可能给出不同的概率值．就是这一点使得主观概率与概率的传统解释有着明显的差别．这也是主观概率受到人们责难之处．不过个人进行判断时并不是主观臆想，必定有一定的信息作为进行判断的依据，所以在这个意义上，主观概率并不是随意指派的．通常，两个有理智的决策人在相同的假定下，具有相同信息和类似经验的情况下，会做出大致相仿的判断，并给出大体上差不多的概率值．因此主观概率中的“主观”二字，并不具有褒贬的意思，只是强调在这样一种赋值过程中，决策人在主观上具有较大的能动性．概括地说，主观概率是在充分考虑了有关信息后，分析者对特定事件产生的一种自信程度．分析者掌握的信息越完全，所做出的判断就越接近客观实际．

（4）概率的公理化定义

到20世纪初，概率论已应用于很多领域，但是直到那时，关于概率论的一些基本概念，例如事件及其概率等都没有严格的、明确的定义，致使许多人对概率的客观含义甚至概率论结论的正确性都产生了怀疑．这一状况严重阻碍了概率论的进一步发展和应用，概率论又落后于当时数学的其他分支的

公理化潮流. 1900年希尔伯特在世界数学家大会上公开提出了建立概率论公理化体系的问题.

20世纪初完成的勒贝格测度和积分理论以及后来发展起来的抽象测度和积分理论，为概率论公理化体系的确立奠定了理论基础. 人们通过对概率论的两个最基本的概念即事件与概率的长期研究，发现事件的运算和集合的运算完全类似，概率与测度有相同的性质. 到了30年代，随着大数定律研究的深入，概率论与测度论的联系越来越明显. 在这种背景下，柯尔莫哥洛夫于1933年在他的《概率论的基本概念》一书中，第一次给出了概率的测度论式的定义和一套严密的公理化体系. 这一公理体系着眼于规定事件及事件概率的最基本的性质和关系，并用这些规定来表明概率的运算法则. 它们是从客观实际中抽象出来的，既概括了概率的古典定义、几何定义及统计定义的基本特征，又避免了各自的局限性和含混之处. 因此这一公理体系一经提出，便迅速获得举世公认. 柯尔莫哥洛夫公理化的出现，是概率论发展史的一个重要里程碑，为近代概率论的蓬勃发展打下了坚实的基础.

下面是一些熟悉的内容的定义：

样本空间：随机试验的每一可能出现的结果称为样本点，一切可能出现的结果的集合称为样本空间.

事件域：如果样本空间 Ω 的子集类 F 满足如下三条，则称 F 为 Ω 上的事件 σ-域或事件域：

① $\Omega\in F$；

② 若 $A\in F$，则 $A^C\in F$；

③ 若 $A_i\in F(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in F$.

概率：设 F 为样本空间 Ω 上的 σ-域，P 为定义在 F 上的集函数，如果它满足下述条件：

① $P(\Omega)=1$；

② 对一切 $A\in F$，都有 $P(A)\geqslant 0$；

③ 若 $A_i\in F(i=1,2,\cdots)$，且两两互斥，则 $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$；

则称 $P(\cdot)$ 为定义在 (Ω,F) 上的概率，$P(A)$ 称为事件 A 的概率，③称为概率的可数可加性，(Ω,F,P) 称为概率空间（或概率场）.

鉴于中学生的认知特点，教科书采用的是概率的统计定义.

3. 产生随机数的方法.

随机数产生的最早方法称为手工方法，即采用抽签、掷骰子、抽牌、摇号或从搅乱的罐中取带数字的球或纸条等方法.

随着随机模拟方法的出现，需要大量的随机数. 显然用手工方法不能满足模拟计算的需要. 1927年，Tippett造出了具有4万个数字的随机数表；1939年，Kendell和Babington-Smith用高速转盘建立了有10万个数字的随机数表；Land公司利用电子装置产生了含有100万个数字的随机数表. 在电子计算机产生之前人们就是利用这些随机数表进行统计模拟计算的.

随着计算机和模拟方法的广泛应用，用计算机来产生随机数成为新的课题.

目前，使用最广、发展最快的计算机产生随机数的方法是数学方法. 它的特点是占用内存少、速度快又便于计算.

在计算机上用数学方法产生均匀随机数是指按照一定的计算方法而产生的数列，它们具有类似于均匀随机变量的独立抽样序列的性质，这些数既然是依照确定算法产生的，便不可能是真正的随机数，因此常把用数学方法产生的随机数称为伪随机数.

4. 均匀随机数的产生.

在计算机上利用数学方法产生随机数的方法很多，比如有平方取中法、乘积取中法、位移法、线性同余法、组合同余法、反馈位移寄存器法等等. 我们这里介绍线性同余法.

线性同余法的一般递推公式为

$$\begin{cases} x_n=(ax_{n-1}+c)(\bmod M), \\ r_n=x_n/M, \qquad\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \\ \text{初值 } x_0. \end{cases}$$

其中 M 为模数，a 为乘子（乘数），c 为增量（加数），且 M，a，c，x_0 均为非负整数.

给定一组参数 M，a，c，x_0，就可以得到一列数 r_1，r_2，…，它是否具有类似于均匀随机变量的独立抽样序列的性质，与这些参数的选择有关. 例如，用下面的递推公式产生的随机数就是比较好的随机数

$$\begin{cases} x_n=(3125x_{n-1})(\bmod(2^{35}-31)), \\ r_n=x_n/(2^{35}-31), \qquad\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots) \\ \text{初值 } x_0 \text{ 为小于}(2^{35}-31)\text{的任意正整数}. \end{cases}$$

中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材．作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下．这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列1～5以及选修1、2中所涉及的基本数学内容．

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的了解是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述．这里我把中学数学概括为一些知识点，并选择“数量关系”“空间形式”“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解．

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学．我们这里选择恩格斯观察数学的角度．恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学．这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”．概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中．但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军．考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意．

集合　只要研究问题，就有研究对象．这些研究对象都是数学中的元素．把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合．因而元素、集合是处处存在的．另一方面，从有关自然数的Peano公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义．在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合．这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用．

统计　统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论．统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法．在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想与聚类分析思想等．

概率　概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础．在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具．概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小．这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似．但是两种度量之间存在如下区别：

1．作为概率的这种度量的值永远不会超过1，几何中的度量却不受这种限制．

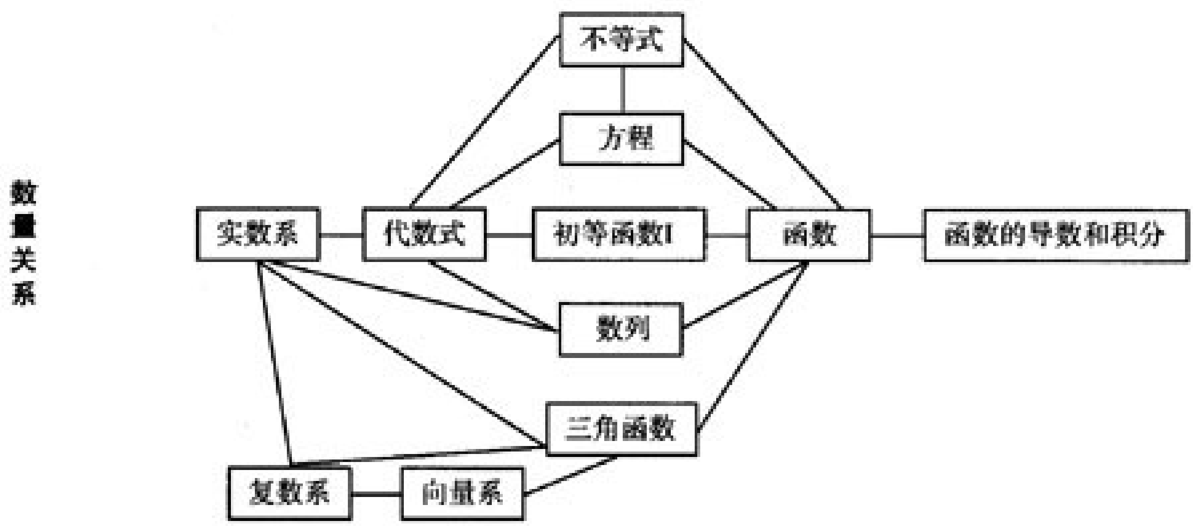
2．概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形．

算法　实现具体计算数量关系的手段．机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程．在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用

计算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

"数量关系"

"数量关系"所涉及的内容可概括为如下结构图：



实数系　实数及其运算和大小关系. 实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发.

复数系　复数及其运算. 由实数扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元 n 次多项式至少有一个复数根，其中 n 为正整数）.

向量系　向量及其运算. 直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对 (x, y)，而空间中向量的坐标是三实数组 (x, y, z). 在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广. 另一方面，在历史上，复数 $(a+bi)$ 曾被推广到四元数 $(a+xi+yj+zk)$，而其中的 $xi+yj+zk$ 被发展成现在的向量. 从这里看到，向量的确是"数"（即四元数）的一部分. 当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）.

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙.

代数式　用文字代表数，我们有了变量 a，b，c，x，y，z 等. 数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算. 代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围.

方程　令两个含变数的代数式相等便得到方程. 方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备. 由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙.

不等式　把方程中的"$=$"换成实数系所特有的"$>$"（或"$<$"）便得到不等式，因而两者有类似的地方. 如方程有同解变换，不等式也有"同解"变换；由函数观点，方程 $f(x)=0$ 的解可以看成函数 $y=f(x)$的零点，而不等式 $f(x)>0$ 的解可以看成使函数 $y=f(x)$取正值的 x 的全体. 另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的"边界点"类似，方程 $f(x, y)=0$ 可设想为不等式 $f(x, y)>0$ 的"边界"."$>$"的性质比"$=$"的性质"坏"许多，我们应非常小心地对待不等式.

初等函数Ⅰ　令变量 y 等于含变量 x 的代数式 $p(x)$，即 $y=p(x)$，就得到 x 的函数 y. 这是人们知道的第一批函数中的一类. 其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数，即对数函数.

数列　数列及数列的运算．在中学只讨论最简单、最基本的两类数列：等差数列及等比数列．我们可以把数列想象成数的推广，也可以把数列看成是一类特殊的函数，从而可以把等差数列与一次函数作类比，把等比数列与指数函数作类比．不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现：在用有理数逼近无理数中，在求圆的面积或球的体积中，在指数为无理数时的指数定义中，在求函数的导数的过程中……

三角函数　描述周期现象的重要数学模型．为解直角三角形而引入锐角三角函数；为解任意三角形而推广到钝角三角函数；为了刻画一些简单的周期运动（已和解三角形毫无关系了）而再次推广到任意角的三角函数，后者成为非常重要的函数，是描述一般周期函数的基石．三角函数是数形结合的产物．

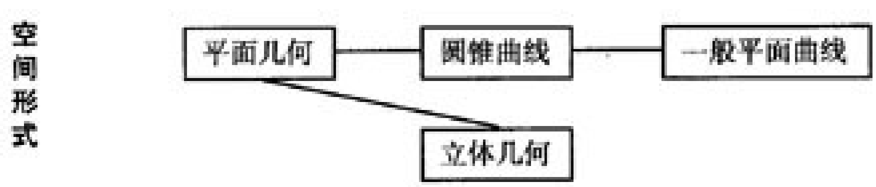
函数　函数及函数的运算（+、−、×）．函数描写运动，刻画一个变量随着另一个变量的变化状态，给出一个数集到另一个数集的对应关系．它是覆盖面广、有统帅作用的概念：数可以看成特殊函数；数的运算可以看成特殊的二元函数；代数式可以容易地被改造成一个函数；数列是特殊的函数；解一元方程就是求一个函数的零点，因而解方程也可纳入函数问题的讨论中；平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子，而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系；解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度，从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学，是弄清中学数学脉络，搞活中学数学的三个重要观点．

函数的导数和积分　虽然函数 $f(x)$ 的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义，但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述，因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物．这里，重要的是微积分基本定理，它使求导函数和求积分真正成为互逆运算，因而大大简化了这两种运算．

“空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图：



平面几何　讨论点，直线，直线的平行和垂直，三角形，圆等．这是平面图形中最基本、最简单者，然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础．

圆锥曲线　在中学，给出它们的几何定义后，使用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们．这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识，同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础．

立体几何　线线、线面、面面之间的位置关系．特别重要的是垂直和平行关系．对于空间图形，只是看看锥面和球面，从直观上去感知它们的结构特征，凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系，以及三视图、透视图，以使我们获得一定的空间形体的直观感觉．

一般平面曲线　虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它，但在整个中学数学中，与函数结伴几乎出现在所有的地方．想到函数概念的无比重要性，对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的．

"数形结合"

用三角函数解三角形　参看**三角函数**．把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果．举例说，已知三角形的两邻边 a，b 及其夹角 C，依边角边定理，第三边 c 完全确定，因而有函数 $c=f(a, b, C)$．如何具体给出这个函数？这里引入三角函数以具体表示这个函数，编制三角函数值表以使它可计算．

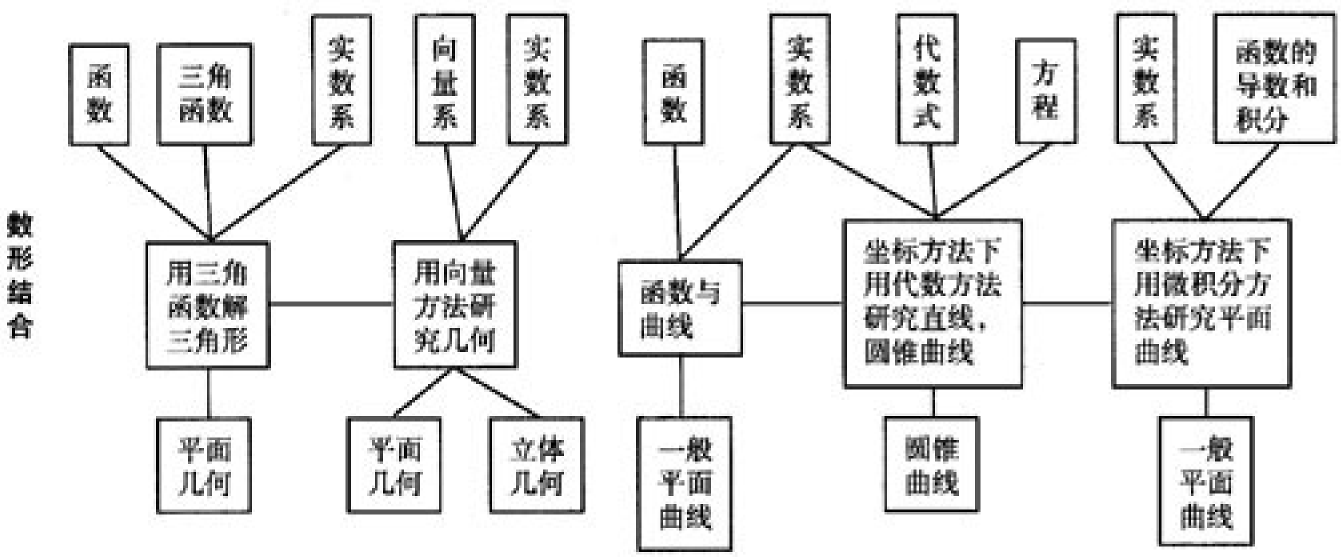
用向量来研究几何　用向量及其运算为工具．用向量方法研究几何，可概括为"三步曲"：用向量表示出问题中关键的点、线、面；进行向量计算得出结果；对所得结果给予几何的解释而将问题解决．

函数与曲线　贯穿中学数学的一对孪生姐妹．

坐标方法下用代数方法研究直线、圆锥曲线　用数及其运算为工具．用代数方法研究几何，可概括为"三步曲"：用数（坐标），代数式，方程表示出问题中关键的点、距离、直线，圆锥曲线；对这些数，代数式，方程进行讨论；把讨论结果给予几何的解释而将问题解决．

坐标方法下用微积分方法研究平面曲线　用导数和积分为工具．用分析方法研究曲线．在坐标系下，函数对应曲线，导数就是曲线切线的斜率，积分就是曲线下覆盖的面积．而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来了．微积分是研究曲线的强大工具．

为了醒目，把它们放在下面的框图中：



最后，作为补充，提出几点想法．它们是把不同内容串联起来的一些细线，有了它们，不同内容的类比、联系就容易了．

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵．让任意运算的对象和数类比，让任意对象的运算和数的运算对比，不仅能使我们获得需要研究的问题，而且能使我们产生研究方法的灵感．

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点．参看**函数**．

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来：函数的曲线，方程与曲线，实数与直线，复数与平面，向量与有向线段，不等式的图象，数据的图象等．

4. 把定性的结果变成定量的结果，把存在的东西具体表示出来：参看用三角函数解三角形．直线用方程表示出来，直线上的点用满足方程的两个实数表示出来；一元二次方程的根用系数表示出来，曲线的切线斜率用导数表示出来等等．一旦定性的东西得到定量的表示，操作起来就容易多了．

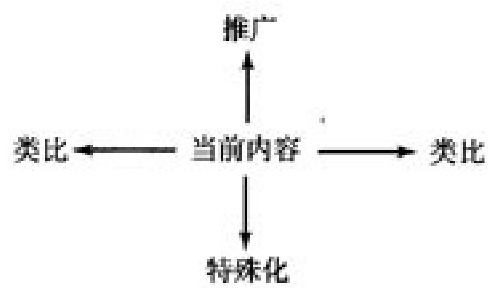
5. "恒等"变换是只变其形不变其质的数学推理，目的是为了从"好"的形式中看出其本质．这在数学中经常出现：如一元二次多项式分解成一次因式的乘积，代数式的恒等变换，三角函数的恒等

变换，方程的同解变换，一组数据的各种不同形式的组合，整数（或一元多项式）的带余除法等等.

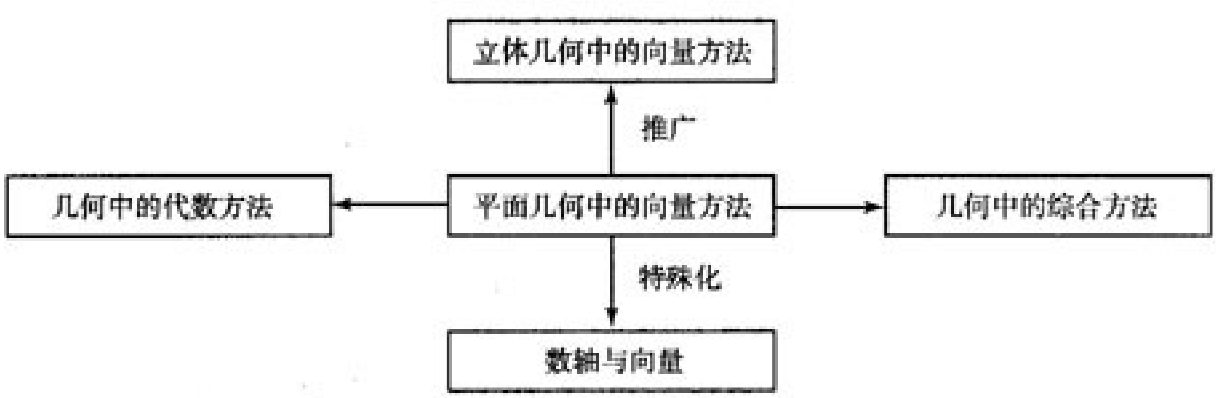
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如，如果两个三角形能够重合放在一起，就说它们全等，这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣；两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向，但如果对有向线段引入新的相等定义：规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的，我们就将得到一个新对象——向量；在函数的相等和方程的等价中，我们都清楚地看到，什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学：中学数学中虽然没有明确的公理体系形式，但在每一次推理时，我们都有明确的推理根据. 在这个意义下，我们心目中都有一个“公理体系”，并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”，是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中，根据概率的定义，经实验、观察得出概率的一系列性质；后来在推导古典概型的概率计算公式时，就是从这些性质出发，经演绎推理而得；在立体几何中，明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义，并归纳出一些判定定理之后，经推理得出一些性质定理；在向量中，有了向量的相等定义和运算定义后，根据这些定义推导出了向量运算的运算律，等等.

8. 从数学学习、研究过程来看，经常使用如下的逻辑思考方法：



其中突出显示了联系的观点，通过类比、推广、特殊化等，可以极大地促进我们的数学思考，使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题，从中获得研究方法的启示. 例如，关于平面几何中的向量方法，我们可以有如下的“联系图”：



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起，不同的方法相互促进，可以使我们提出更多的问题，在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如，我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线，在上述“联系图”的引导下，就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

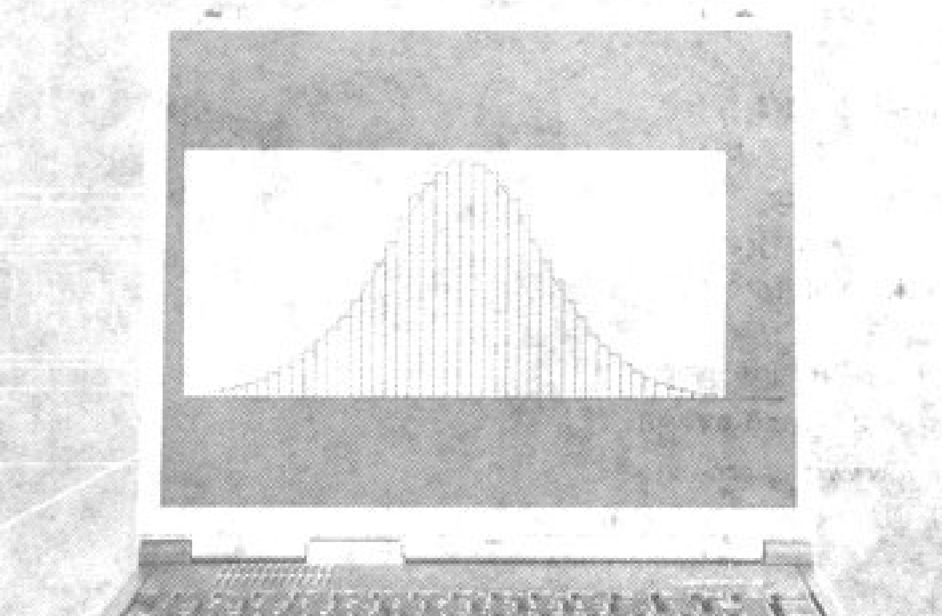
普通高中课程标准实验教科书

数学 ③

必修

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著



人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书
数学（3）必修 A版
教师教学用书
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
*
人民教育出版社 出版发行
（北京沙滩后街55号 邮编：100009）
网址：http：//www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装 全国新华书店经销
*
开本：890毫米×1 240毫米 1/16 印张：8.25 字数：210 000
2004年9月第1版 2004年12月第1次印刷
ISBN 7-107-18113-0
G·11202（课） 定价：7.70元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与出版社联系调换。
（联系地址：北京市方庄小区芳城园三区13号楼 邮编：100078）

目录

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：张淑梅
主要编者：李建华　杨照宇　宋莉莉　李　勇　张淑梅
责任编辑：宋莉莉
美术编辑：王俊宏　王　艾
封面设计：林荣桓

说 明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学（A 版），是以教科书为基础的系列化教材，包括基本教材和配套教学资源．基本教材是教科书和教师教学用书，配套教学资源包括学生学习用书、课节练习、章节评价手册、教学设计与案例、寒暑假作业、教学投影片、信息技术支持系统等．

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学（A 版）》包括教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》中规定的全部内容．本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下，认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系，体现**基础性、时代性、典型性和可接受性等**，具有如下特点：

1．“亲和力”：以生动活泼的呈现方式，激发兴趣和美感，引发学习激情．

选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材，用生动活泼的语言，创设能够体现数学的概念和结论，数学的思想和方法，以及数学应用的学习情境，使学生产生对数学的亲切感，引发学生“看个究竟”的冲动，兴趣盎然地投入学习．

2．“问题性”：以恰时恰点的问题引导数学活动，培养问题意识，孕育创新精神．

在知识形成过程的“关键点”上，在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上，在数学知识之间联系的“联结点”上，在数学问题变式的“发散点”上，在学生思维的“最近发展区”内，通过“观察”“思考”“探究”等栏目，提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题，引导学生的思考和探索活动，使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程，切实改进学生的学习方式．

3．“科学性”与“思想性”：通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神．

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平．特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽最大可能展示以下常用的逻辑思考方法：

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{推广} & \\
\text{类比} & \text{当前内容} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & \text{类比} \\
 & \text{特殊化} &
\end{tikzcd}
$$

以使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数

学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流．

4．“时代性”与“应用性”：以具有时代性和现实感的素材创设情境，加强数学活动，发展应用意识．

利用具有时代气息的、反映改革开放、市场经济下的社会生活和建设成就的素材创设情境，引导学生通过自己的数学活动，从事物中抽取“数”“形”属性，从一定的现象中寻找共性和本质内涵，并进一步抽象概括出数学概念、结论，使学生经历数学的发现和创造过程，了解知识的来龙去脉．教科书设置了“观察与猜想”“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等栏目，为学生提供丰富的具有思想性、实践性、挑战性的，反映数学本质的选学材料，拓展学生的数学活动空间，发展学生“做数学”“用数学”的意识．

5．“联系性”：以有层次和完整的结构，提供多种选择；将配套教材作为教材建设的有机组成部分．

本套教师教学用书按照相应的教科书章、节顺序编排，内容包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目．

1．总体设计是对全章进行的概括性介绍，重点说明本章的设计思想．包括：课程目标、学习目标、本章知识结构框图、内容安排说明、课时安排建议、教科书编写意图与教学建议等．

（1）课程目标与学习目标　说明学生通过学习本章内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

（2）本章知识结构框图　展示了本章的知识结构，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

（3）内容安排说明　按照全章内容的编排顺序，参照教科书“小结”中的“逻辑结构框图”，说明内容的前后逻辑关系，并对本章的重点、难点进行说明；

（4）课时安排建议　根据教科书的具体内容提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整．

2．教科书分析按照教科书内容顺序、以节为单位进行分析，着重说明了编写意图．主要包括：本节知识结构、重点、难点、教科书编写的意图与教学建议等．

（1）本节知识结构　讲述本节知识点及其发生、发展过程（逻辑关系）．说明学习本节内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

（2）重点　不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；

（3）难点　说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

（4）编写意图与教学建议　主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键词句，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空中的问题，给出解释或解答.

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议.

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型. 具体包括了下面一些内容：

（1）教学任务分析　重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；

（2）教学重点、难点　表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；

（3）教学基本流程　以框图的形式表示出教学的基本进程；

（4）教学情境设计　以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图.

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能.

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料. 同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释.

本书是必修课程数学 3 的教师教学用书，包含算法初步，统计，概率三章内容. 全书共 36 个课时，具体分配如下（仅供参考）：

第 1 章　算法初步	约 12 课时
第 2 章　统计	约 16 课时
第 3 章　概率	约 8 课时

除已列出的主要编写者外，为本书提供部分教学设计案例和习题解答的有：赵春、金克勤、李伯青、孙旭、杨风文、程国红、李静，审稿：章建跃、刘意竹.

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要. 由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，因此其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师教学服务.